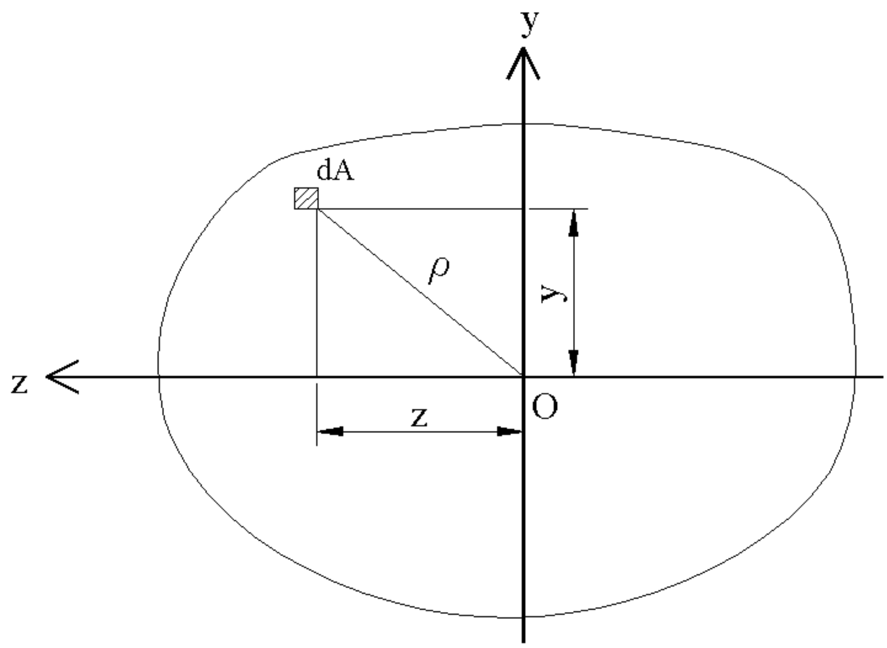
Геометрические характеристики плоских сечений.

В сопротивлении материалов при изучении напряженно-деформированного состояния элементов конструкций рассматривается равновесие отделенной части бруса. При этом в уравнениях равновесия встречаются следующие геометрические характеристики поперечного сечения бруса, которое можно рассматривать как некоторую плоскую фигуру, перпендикулярную оси бруса.



$\int\limits_A y\,dA = S_z$ – статический момент плоской фигуры относительно оси Oz.

$\int\limits_A z\,dA = S_y$ – статический момент плоской фигуры относительно оси Oy.

$\left.\begin{aligned} J_z &= \int\limits_A y^2 dA \\ J_y &= \int\limits_A z^2 dA \end{aligned}\right\}$ – моменты инерции плоской фигуры относительно осей Oz и Oy.

$J_{yz} = \int\limits_A y \cdot z\,dA$ – центробежный момент инерции плоской фигуры относительно осей Oy и Oz.

$J_x \equiv J_o = \int\limits_A \rho^2 dA$ – момент инерции плоской фигуры относительно оси Ox (направлена перпендикулярно плоскости чертежа) или полярный момент инерции относительно точки O.

Справедлива зависимость

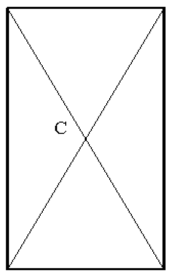
$$J_o = \int\limits_A \rho^2 dx = \int\limits_A (y^2 + z^2)\,dA = \int\limits_A y^2 dA + \int\limits_A z^2 dA = J_z + J_y.$$

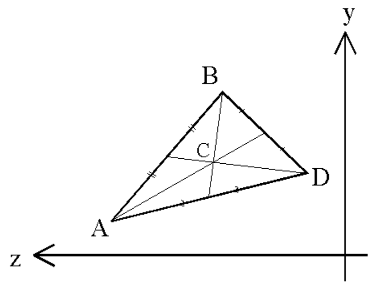
О. Оси координат, проходящие через центр тяжести поперечного сечения бруса (плоской фигуры), называются центральными.

Определение положения центра тяжести плоской фигуры.

Простейшие фигуры.

Прямоугольник. Треугольник.

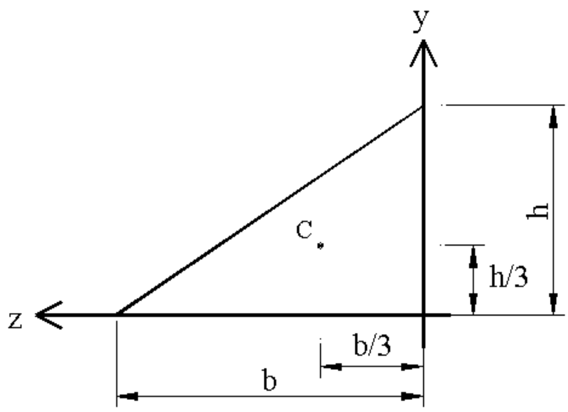


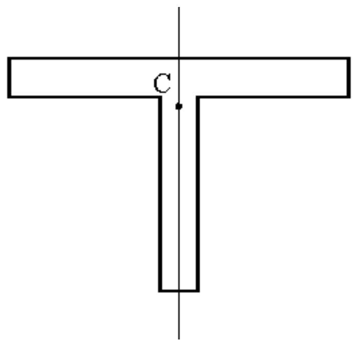


$$y_c = \frac{y_a + y_b + y_d}{3},$$

$$z_c = \frac{z_a + z_b + z_d}{3}.$$

Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан.



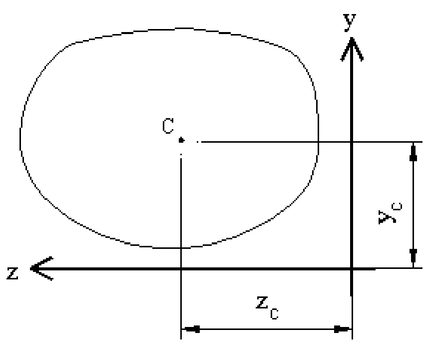


Замечание. Если фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести фигуры лежит на этой оси.

Сложная фигура.

Можно доказать следующее утверждение.

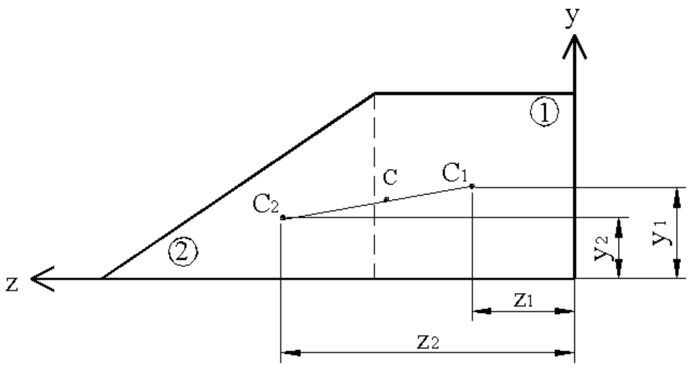
Статический момент плоской фигуры относительно произвольной оси равен произведению площади фигуры на алгебраическое значение расстояния от центра тяжести фигуры до этой оси.



$$\left.\begin{aligned} S_y &= A \cdot z_c, \\ S_z &= A \cdot y_c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y_c = \frac{S_z}{A}, \quad z_c = \frac{S_y}{A}.$$

Пример. Метод разбиений.

Разбиваем фигуру на простейшие, положение центров тяжести которых известно.

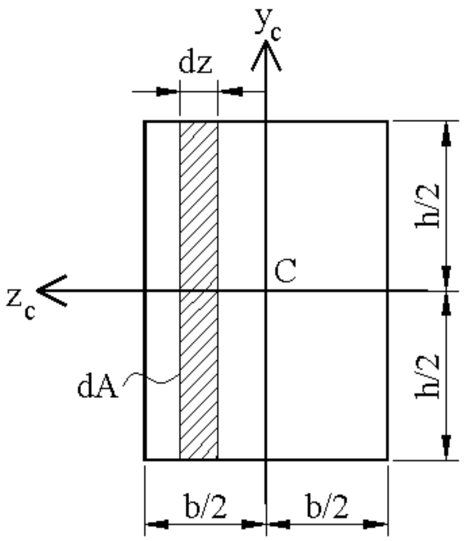


$$\left.\begin{aligned} S_y &= A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2, \\ S_z &= A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2, \\ A &= A_1 + A_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_c &= \frac{S_z}{A}, \\ z_c &= \frac{S_y}{A} \end{aligned}\right\}$$

Замечания

- ♦ Статический момент плоской фигуры относительно оси симметрии равен нулю.
- ♦ Статические моменты плоской фигуры относительно центральных осей равны нулю.

Пример вычисления моментов инерции



$dA = h \cdot dz$;

$$J_{y_c} = \int_A z^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 h dz = \left.\frac{hz^3}{3}\right|_{-b/2}^{b/2} =$$

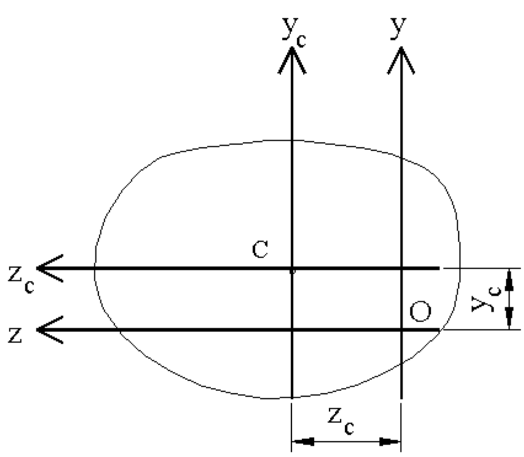
$$= \frac{h}{3}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right] = \frac{hb^3}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{hb^3}{12}$$

Аналогично доказывается, что $J_{z_c} = \frac{bh^3}{12}$.

Замечание: в куб возводится размер, перпендикулярный оси.

Замечание. Если одна из двух осей координат является осью симметрии, то центробежный момент инерции фигуры относительно этих осей равен нулю.

Зависимости между моментами инерции плоской фигуры относительно параллельных осей, одна из которых центральная



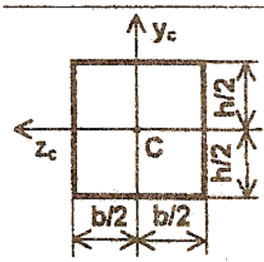
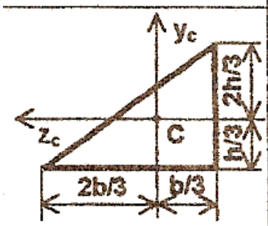
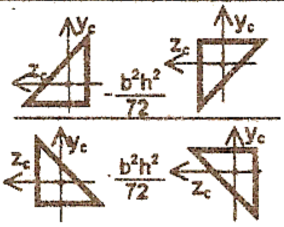
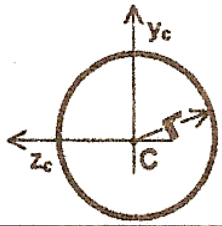
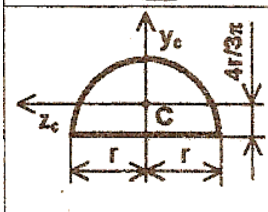
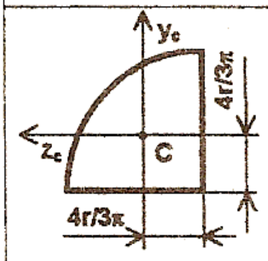
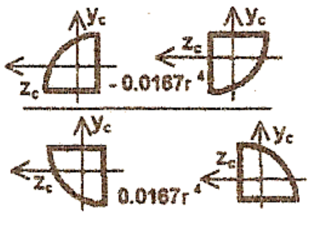
Здесь y_c и z_c – координаты центра тяжести фигуры (т. С) в осях yOz.

$$\left.\begin{aligned} J_y &= J_{y_c} + A \cdot z_c^2, \\ J_z &= J_{z_c} + A \cdot y_c^2, \\ J_{yz} &= J_{y_c z_c} + A \cdot y_c \cdot z_c. \end{aligned}\right\}$$

(*) Момент инерции сечения относительно произвольной оси равен моменту инерции сечения относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между этими осями.

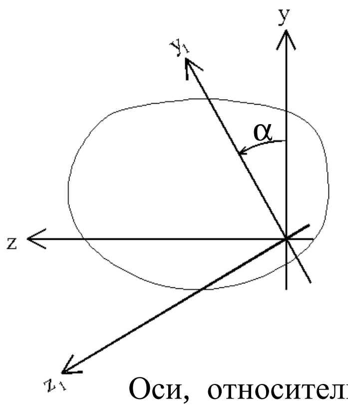
(*) Центробежный момент инерции сечения относительно произвольных осей равен центробежному моменту инерции сечения относительно центральных осей, параллельных данным, плюс произведение площади сечения на координаты центра тяжести фигуры в исходных осях.

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

Фигура	Значения моментов инерции		
	J_{yc}	J_{zc}	J_{yczc}
	$\dfrac{h \cdot b^3}{12}$	$\dfrac{b \cdot h^3}{12}$	0
	$\dfrac{h \cdot b^3}{36}$	$\dfrac{b \cdot h^3}{36}$	
	$\dfrac{\pi \cdot r^4}{4}$	$\dfrac{\pi \cdot r^4}{4}$	0
	$\dfrac{\pi \cdot r^4}{8}$	$0.11\, r^4$	0
	$0.055\, r^4$	$0.055\, r^4$	

<u>Изменение моментов инерции фигуры при повороте осей.</u>

$$\left.\begin{aligned}
J_{y_1} &= J_y \cdot \cos^2(\alpha) + J_z \cdot \sin^2(\alpha) - J_{yz} \cdot \sin(2\alpha),\\
J_{z_1} &= J_y \cdot \sin^2(\alpha) + J_z \cdot \cos^2(\alpha) + J_{yz} \cdot \sin(2\alpha),\\
J_{y_1 z_1} &= \frac{J_y - J_z}{2} \cdot \sin(2\alpha) + J_{yz} \cdot \cos(2\alpha).
\end{aligned}\right\}$$



Положительный угол α откладывается от положительного направления оси y к положительному направлению оси z.

Главные оси и главные моменты инерции

Оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремума, а центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции.

Главных осей инерции две и они взаимно перпендикулярны. Относительно одной из них момент инерции достигает максимума, относительно другой – минимума.

Моменты инерции фигуры относительно главных осей инерции называются главными моментами инерции и обозначаются J_{max} и J_{min}.

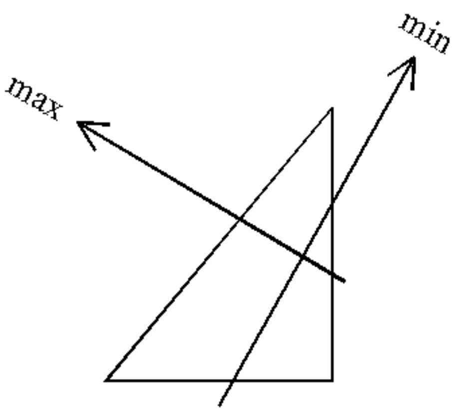
Моменты инерции фигуры относительно главных центральных осей инерции называются главными центральными моментами инерции.

Замечание.

Формулы сопротивления материалов записываются в главных центральных осях поперечного сечения.

Осевые моменты инерции всегда положительны, центробежный момент инерции может быть и положительным и отрицательным.

Выражения для главных моментов инерции



$$J_{max} = \frac{J_y + J_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2};$$

$$J_{min} = \frac{J_y + J_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2}.$$

Главные оси инерции можно построить в любой точке фигуры. К "минимальной" оси фигура "прижимается", от "максимальной" оси "отталкивается".

Положение главных осей инерции

$$\alpha_{max} = \mathrm{arctg}\left(\frac{J_y - J_{max}}{J_{yz}}\right); \qquad \alpha_{min} = \mathrm{arctg}\left(\frac{J_y - J_{min}}{J_{yz}}\right). \qquad |\alpha_{max} - \alpha_{min}| = 90^0.$$

Положительный угол откладывается от положительного направления оси y к положительному направлению оси z. Верны также формулы

$$\alpha_{max} = \mathrm{arctg}\left(\frac{J_{yz}}{J_z - J_{max}}\right); \qquad \alpha_{min} = \mathrm{arctg}\left(\frac{J_{yz}}{J_z - J_{min}}\right).$$

Инварианты инерции

Следующие величины инвариантны (не меняются) по отношению к повороту осей координат (не зависят от угла α):

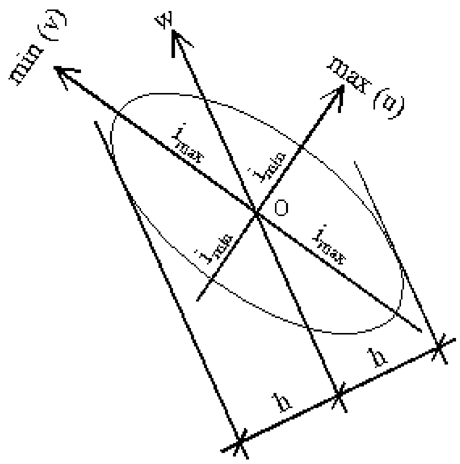
а) $J_y + J_z = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad J_y + J_z = J_{max} + J_{min}$;

б) $J_y \cdot J_z - J_{yz}^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad J_y \cdot J_z - J_{yz}^2 = J_{max} \cdot J_{min}$.

Радиусы инерции

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}, \qquad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}, \qquad i_{max} = \sqrt{\frac{J_{max}}{A}}, \qquad i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}.$$

Эллипс инерции



Для построения эллипса инерции в данной точке плоской фигуры следует определить положение и изобразить главные оси инерции. По "максимальной" оси в качестве полуосей эллипса необходимо отложить отрезки, равные i_{min}, по "минимальной" оси – отрезки длиной i_{max}. По полученным точкам строится эллипс инерции, который будет "вытянут" вдоль "минимальной" оси инерции. Уравнение эллипса инерции в главных осях имеет вид

$$\frac{u^2}{i_{min}^2} + \frac{v^2}{i_{max}^2} = 1.$$

Свойства эллипса инерции

Эллипс инерции, построенный в данной точке плоской фигуры, позволяет найти момент инерции фигуры относительно произвольной оси, проходящей через эту точку.

Пусть w произвольная ось, проходящая через центр эллипса инерции точку O. Построим касательную к эллипсу инерции, параллельную оси w (таких касательных можно провести две). Расстояние между осью w и проведенной касательной (можно взять любую из них) равно радиусу инерции фигуры относительно оси w: $h = i_w$. Отсюда

$$J_w = i_w^2 \cdot A = h^2 \cdot A.$$

Литература

1. Методические указания №730. Вычисление моментов инерции сложных фигур.
2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов.
3. Все учебники по сопротивлению материалов.