

ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ



В.И.Самуль

ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ
И ПЛАСТИЧНОСТИ

В. И. Самуль

**ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ
И ПЛАСТИЧНОСТИ**

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
строительных специальностей вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

ББК 22.37
С17
УДК 539.3(075)

Рецензент — д-р физ.-мат. наук, проф. М. А. Колтунов

Самуль В. И.
С17 Основы теории упругости и пластичности: Учеб. пособие для студентов вузов. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. школа, 1982. — 264 с., ил.
В пер.: 75 к.

Книга соответствует программе для строительных вузов. В ней рассматриваются основные уравнения теории упругости и методы их решения, вопросы изгиба и устойчивости пластинок, вариационные методы прикладной теории упругости, основы расчета оболочек по моментной и безмоментной теориям, основные уравнения теории малых упругопластических деформаций и методы их решения. Каждый метод по возможности иллюстрируется примером.

С $\frac{1703030000-164}{001(01)-82}$ 77-82

ББК 22.37
531

Владислав Иосифович Самуль

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Зав. редакцией К. И. Аношина. Научный редактор А. М. Михайлов. Редактор М. А. Алексеева. Мл. редактор Т. А. Дорофеева. Художественный редактор В. П. Спирина. Технический редактор Р. С. Родичева. Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 3386

Изд. № От-344. Сдано в набор 09.09.81. Подп. в печать 05.03.82.

Формат 60×90^{1/16}. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная.

Объем 16,5 усл. печ. л. 16,5 усл. кр.-отт. 15,58 уч.-изд. л.

Тираж 30 000 экз. Зак. № 481. Цена 75 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46

© Издательство «Высшая школа», 1982

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга написана на основе курса лекций, читаемых автором в течение двадцати лет студентам строительного факультета Пермского политехнического института. В ней нашел отражение опыт работы преподавателей кафедры.

Цель книги — помочь студентам освоить методы теории упругости, пластичности и ползучести и показать их применение на практически важных примерах. Применяемые в книге методы исследования требуют от читателя знания курсов математики и сопротивления материалов в объеме вузовской программы.

Материал книги полностью соответствует новой программе по аналогичному курсу для студентов строительных специальностей вузов. В связи с этим во втором издании книга подвергалась значительной переработке.

Так, более подробно разобраны понятия тензоров напряжений и деформаций и их разложение на шаровой тензор и девиатор, добавлен закон Гука в тензорной форме. В новой, V главе рассматриваются простейшие задачи теории упругости: чистый изгиб прямого призматического стержня и кручение круглого стержня постоянного сечения. В главе VI добавлен расчет балки-стенки. Далее добавлены следующие параграфы: «Понятие о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство», «Понятие о расчете гибких пластинок», «Понятие о расчете гибких пологих оболочек». Переработан раздел о математическом аппарате теории пластичности, добавлено понятие о теории пластического течения, дано понятие о несущей способности балок и плит на основе модели жесткопластического материала. Вновь написаны главы XIII и XIV об основных зависимостях теории ползучести и даны простейшие задачи теории ползучести.

Все расчеты приведены в Международной системе единиц (СИ).

Автор выражает глубокую благодарность А. М. Михайлову за ценные замечания и большую работу, сделанную при редактировании рукописи.

Замечания и пожелания по улучшению книги автор просит направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Теория упругости, пластичности и ползучести. Ее задачи и методы

Теория упругости и пластичности представляет собой раздел механики, изучающий деформации в твердом теле, вызванные физическими воздействиями, и возникающие при этом внутренние силы как в состоянии покоя, так и в состоянии движения.

Такие же задачи решаются в сопротивлении материалов. Однако между теорией упругости и пластичности и сопротивлением материалов имеются существенные различия, которые заключаются прежде всего в исходных предпосылках и методах решения задач.

В сопротивлении материалов рассматриваются приближенные теоретические методы, использующие кинематические или статические гипотезы (например, гипотеза плоских сечений), причем основным объектом сопротивления материалов являются элементы стержневых систем.

Основные предпосылки теории упругости и пластичности отличаются большей широтой и для разработки расчетных методов используется математический аппарат более строгий, чем в сопротивлении материалов.

В теории упругости и пластичности рассматриваются задачи, которые не могут быть решены методами сопротивления материалов. Кроме того, аппарат теории упругости и пластичности позволяет дать оценку точности решения задач, рассматриваемых в сопротивлении материалов.

В теории упругости и пластичности применяют и приближенные методы. В связи с этим различают математическую и прикладную теорию упругости и пластичности, причем в последнем случае решение задач базируется на ряде дополнительных допущений.

Рассматриваемая в данном пособии теория упругости называется классической или линейной. В ее основе лежит представление об идеально упругом теле (материале). Для такого тела характерна наиболее простая линейная зависимость между напряжениями и деформациями и диаграмма растяжения—сжатия представляет собой наклонную прямую OAB , проходящую через начало координат (рис. 1).

Если материал даже при малых напряжениях не подчиняется линейному закону деформирования или процесс деформирования перешел за предел пропорциональности и диаграмма изображается кривой OAC , то в качестве физического закона деформирования следует принять уравнение этой кривой $\sigma = f(\epsilon)$. Если при медленной разгрузке процесс будет протекать по кривой CAO , повторяя в обратном порядке

те же состояния, что и при нагружении, а график процесса возвратится в начальную точку O , то такой материал принято называть нелинейно упругим. Законы деформирования нелинейно упругого тела изучаются нелинейной теорией упругости.

Теория пластичности в отличие от теории упругости рассматривает тела, которые не подчиняются законам упругости либо с самого начала приложения к ним внешних воздействий, либо начиная с некоторой стадии нагружения.

Теория ползучести в отличие от теории упругости и пластичности изучает изменение во времени напряжений и деформаций в твердом теле, возникших в результате начального нагружения.

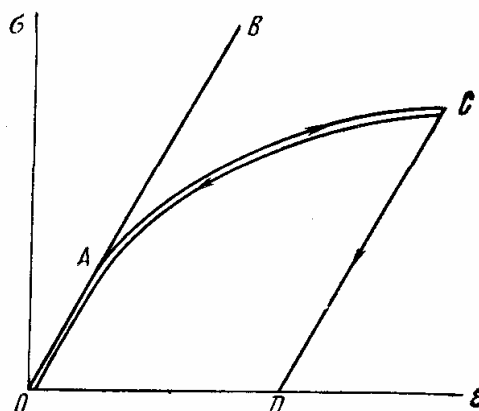


Рис. 1

Реальные деформируемые твердые материалы обладают разнообразными механическими свойствами. Поэтому в рамках названных выше теорий применяются различные расчетные модели материалов, отражающие специфику их деформирования под нагрузкой. С моделями таких материалов и методами их расчета можно познакомиться по более полным руководствам.

§ 2. Краткий исторический очерк развития теории упругости, пластичности и ползучести

Созданию теории упругости и пластичности как самостоятельного раздела механики предшествовали работы ученых XVII и XVIII вв. Еще в начале XVII в. Г. Галилей (1564—1642) сделал попытку решить задачи о растяжении и изгибе бруса. Он был одним из первых, кто попытался применить расчеты к инженерно-строительным задачам.

Теорией изгиба тонких упругих стержней занимались такие выдающиеся ученые, как Э. Мариотт, Я. Бернулли-старший, Ш. О. Кулон, Л. Эйлер, причем становление теории упругости как науки можно связать с работами Р. Гука, Т. Юнга, Ж. Л. Лагранжа, С. Жермен.

Роберт Гук (1635—1703) положил начало механике упругих тел, опубликовав в 1678 г. работу, в которой описал установленный им закон пропорциональности между нагрузкой и деформацией при растяжении. Томас Юнг (1773—1829) в самом начале XIX в. ввел понятие модуля упругости при растяжении и сжатии. Он установил также различие между деформацией растяжения или сжатия и деформацией сдвига. К этому же времени относятся работы Жозефа Луи Лагранжа (1736—1813) и Софи Жермен (1776—1831). Они нашли решение задачи об изгибе и колебаниях упругих пластинок. В дальнейшем теорию пластинок усовершенствовали С. Пуассон (1781—1840) и Л. Навье (1785—1836).

Так, к концу XVIII и началу XIX вв. были заложены основы сопротивления материалов и создана почва для возникновения теории упругости. Быстрое развитие техники ставило перед математикой огромное количество практических задач, что и привело к быстрому развитию теории. Одной из многих важных проблем была проблема исследования свойств упругих материалов. Решение этой проблемы давало возможность более глубоко и полно изучить внутренние силы и деформации, возникающие в упругом теле под действием внешних сил.

Датой возникновения математической теории упругости надо считать 1821 г., когда вышла в свет работа Л. Навье, в которой были сформулированы основные уравнения.

Большие математические трудности решения задач теории упругости привлекли к ней внимание многих выдающихся ученых-математиков XIX в.: Ламе, Клапейрона, Пуассона и др. Дальнейшее развитие теория упругости получила в трудах французского математика О. Коши (1789—1857), который ввел понятия деформации и напряжения, упростив тем самым вывод общих уравнений.

В 1828 г. основной аппарат математической теории упругости нашел свое завершение в трудах французских ученых и инженеров Г. Ламе (1795—1870) и Б. Клапейрона (1799—1864), преподававших в то время в Институте инженеров путей сообщения в Петербурге. В их совместной работе дано приложение общих уравнений к решению практических проблем.

Решение многих задач теории упругости стало возможным после того, как французский механик Б. Сен-Венан (1797—1886) выдвинул принцип, носящий его имя, и предложил эффективный метод решения задач теории упругости. Заслуга его, по словам известного английского ученого А. Лява (1863—1940), заключается еще и в том, что он увязал проблемы кручения и изгиба балок с общей теорией.

Если французские математики занимались в основном общими проблемами теории, то русские ученые внесли большой вклад в развитие науки о прочности решением многих актуальных практических задач. С 1828 по 1860 г. в петербургских технических вузах преподавал математику и механику выдающийся ученый М. В. Остроградский (1801—1861). Его исследования по вопросам колебаний, возникающих в упругой среде, имели важное значение для развития теории упругости. Остроградский воспитал плеяду ученых и инженеров. Среди них следует назвать Д. И. Журавского (1821—1891), который, работая на строительстве Петербурго-Московской железной дороги, создал не только новые схемы мостов, но и теорию расчета мостовых ферм, а также вывел формулу касательных напряжений в изгибаемой балке.

А. В. Гадолин (1828—1892) применил задачу Ламе об осесимметричной деформации толстостенной трубы к исследованию напряжений, возникающих в стволах артиллерийских орудий, одним из первых приложив теорию упругости к конкретной инженерной задаче.

Из других задач, решенных в конце XIX в., нужно отметить работы Х. С. Головина (1844—1904), произведшего методами теории упруго-

сти точный расчет кривого бруса, что дало возможность определить степень точности приближенных решений.

Большая заслуга в развитии науки о прочности принадлежит В. Л. Кирпичеву (1845—1913). Ему удалось значительно упростить различные методы расчета статически неопределимых конструкций. Он первый применил оптический метод к экспериментальному определению напряжений, создал метод подобия.

Тесная связь с практикой строительства, принципиальность и глубина анализа характеризуют советскую науку. И. Г. Бубнов (1872—1919) разработал новый приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений, блестяще развитый Б. Г. Галеркиным (1871—1945). Вариационный метод Бубнова—Галеркина в настоящее время получил широкое распространение. Большое значение имеют труды этих ученых в теории изгиба пластинок. Новые важные результаты, продолжая исследования Галеркина, получил П. Ф. Папкович (1887—1946).

Метод решения плоской задачи теории упругости, основанный на применении теории функций комплексного переменного, был предложен Г. В. Колосовым (1867—1936). Впоследствии этот метод был развит и обобщен Н. И. Мусхелишвили (1891—1976). Ряд задач по устойчивости стержней и пластинок, вибрациям стержней и дисков, по теории удара и сжатия упругих тел решил А. Н. Динник (1876—1950). Большое практическое значение имеют работы Л. С. Лейбензона (1879—1951) по устойчивости упругого равновесия длинных закрученных стержней, по устойчивости сферических и цилиндрических оболочек. Важное практическое значение имеют капитальные работы В. З. Власова (1906—1958) по общей теории тонкостенных пространственных стержней, складчатых систем и оболочек.

Теория пластичности имеет более короткую историю. Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном в 70-е годы XIX в. на основании опытов французского инженера Г. Треска. В начале XX в. над проблемами пластичности работали Р. Мизес, Г. Генки, Л. Прандтль, Т. Карман. С 30-х годов XX в. теория пластичности привлекла к себе внимание большого круга видных зарубежных ученых (А. Надаи, Р. Хилла, В. Прагера, Ф. Ходжа, Д. Друккера и др.). Широко известны работы по теории пластичности советских ученых В. В. Соколовского, А. Ю. Ишлинского, Г. А. Смирнова-Аляева, Л. М. Качанова. Фундаментальный вклад в создание деформационной теории пластичности внес А. А. Ильюшин. А. А. Гвоздев разработал теорию расчета пластинок и оболочек по разрушающим нагрузкам. Эта теория успешно развита А. Р. Ржаницыным.

Теория ползучести как раздел механики деформируемого тела сформировалась сравнительно недавно. Первые исследования в этой области относятся к 20-м годам XX в. Их общий характер определяется тем, что проблема ползучести представляла большую важность для энергомашиностроения и инженеры были вынуждены искать простые и быстро ведущие к цели методы решения практических задач. В создании теории ползучести большая роль принадлежит тем авторам, которые внесли существенный вклад в создание современной теории пласт-

тичности, отсюда общность многих идей и подходов. В нашей стране первые работы по механической теории ползучести принадлежат Н. М. Беляеву (1943), К. Д. Миртову (1946), к концу 40-х годов относятся первые исследования Н. Н. Малинина, Ю. Н. Работнова.

Исследования в области упруговязких тел выполнены в работах А. Ю. Ишлинского, А. Н. Герасимова, А. Р. Ржаницына, Ю. Н. Работнова. Применение этой теории к стареющим материалам, в первую очередь к бетону, дано в работах Н. Х. Арутюняна, А. А. Гвоздева, Г. Н. Маслова. Большой объем исследований ползучести полимерных материалов выполнен научными коллективами под руководством А. А. Ильюшина, А. К. Малмейстера, М. И. Розовского, Г. Н. Савина.

Советское государство уделяет большое внимание науке. Организация научно-исследовательских институтов, участие в разработке актуальных проблем больших коллективов ученых позволили поднять советскую науку на более высокую ступень.

В кратком обзоре нет возможности подробнее остановиться на работах всех ученых, внесших свой вклад в развитие теории упругости и пластичности. Желающие подробно ознакомиться с историей развития этой науки могут обратиться к учебнику Н. И. Безухова [1], где дан детальный разбор основных этапов развития теории упругости и пластичности, а также приведена обширная библиография.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1. Объект изучения. Основные принципы классической теории упругости

Современное состояние науки не дает возможности создать общие методы расчета, учитывающие все особенности строения реальных тел. Поэтому классическая теория упругости все свои выводы строит на некоторой модели деформируемого твердого тела. Такой моделью, как было указано выше, является идеально упругое тело. Рассмотрим основные свойства, которыми наделяется эта модель.

Идеально упругое тело предполагается вполне упругим. Под полной упругостью понимается свойство твердых тел полностью восстанавливать первоначальную форму и объем после устранения внешних физических воздействий. Первоначальное состояние предполагается таковым, что при отсутствии нагрузок в теле не возникает никаких напряжений. Такое состояние тела обычно называется *естественным*. Предположение о естественном состоянии исключает из рассмотрения начальные напряжения, характер и величина которых, как правило, не известны и зависят от истории возникновения тела.

При идеальной упругости предполагается линейная зависимость между нагрузкой тела и его перемещением, что позволяет установить однозначную зависимость между напряжениями и деформациями для каждой температуры независимо от времени.

Идеально упругое тело предполагается *сплошным*, т. е. непрерывное до деформирования, оно остается непрерывным и после деформирования. Любой объем тела, включая микрообъемы, не имеет пустот и разрывов. Это дает возможность рассматривать деформации и перемещения точек тела как непрерывные функции координат. Тем самым не принимаются во внимание атомистическая структура вещества и движение молекул, составляющих тело.

Идеально упругое тело предполагается *однородным*. Это значит, что во всех точках тела при одних и тех же напряжениях возникают одинаковые деформации. Предположение об однородности позволяет считать величины, характеризующие упругие свойства тела, постоянными по всему объему тела.

Идеально упругое тело предполагается *изотропным*. Под этим подразумевается, что упругие свойства тела одинаковы по всем направлениям.

Реальные тела в той или иной степени отличаются от рассматриваемой модели. Поэтому приемлемость решений, получаемых в теории упругости, для реальных тел зависит от того, насколько эти тела можно считать вполне упругими, сплошными, однородными и изотропными.

Рассмотрим основные принципы теории упругости.

В классической теории упругости принимается, что перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами, а относительные удлинения и углы сдвига малы по сравнению с единицей.

Малость перемещений и линейная зависимость между напряжениями и деформациями позволяют применить

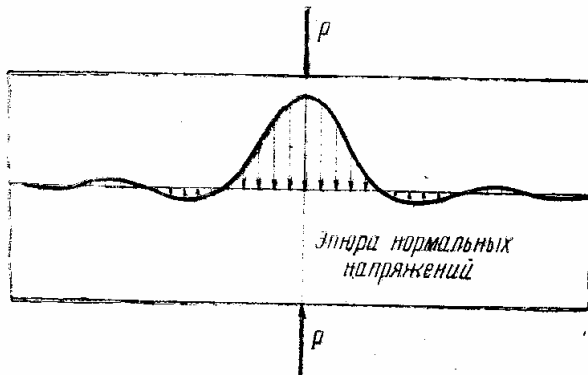


Рис. 2

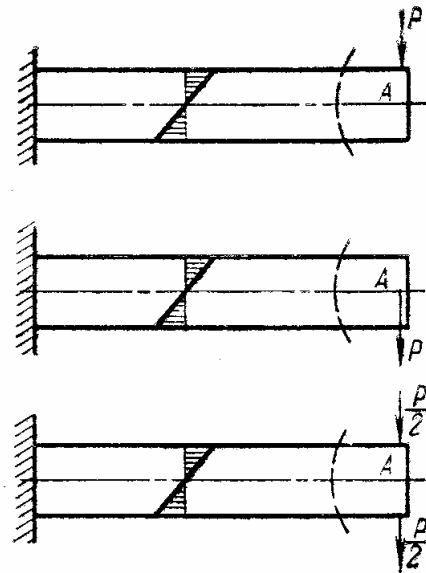


Рис. 3

принцип независимости действия сил. Этот принцип дает возможность подсчитать результат воздействия на тело системы сил сложением результатов воздействия каждой силы в отдельности.

Большое значение при решении многих задач в теории упругости имеет *принцип локальности эффекта самоуравновешенных нагрузок*, или принцип Сен-Венана. Согласно этому принципу, система взаимно уравновешенных нагрузок, приложенная к малой части тела, вызывает напряжения, быстро убывающие по мере удаления от места приложения нагрузок (местные напряжения).

Высказанную мысль можно пояснить на следующем примере. При захвате проволоки клещами на нее действуют две равные и противоположно направленные силы P (рис. 2). Они создают большие напряжения и деформации в месте захвата, быстро уменьшающиеся при удалении влево и вправо от него. На рисунке показана эпюра нормальных напряжений вдоль оси проволоки.

Принцип Сен-Венана имеет и другую формулировку: в точках твердого тела, достаточно удаленных от места приложения нагрузок, напряжения весьма мало зависят от характера распределения этих нагрузок по поверхности тела. Например, напряжения в балках, изобра-

женных на рис. 3, будут различны в пределах области A . Однако вне области A во всех трех случаях напряжения мало отличаются.

На основании принципа Сен-Венана нагрузку, распределенную по небольшой части поверхности тела, можно заменять сосредоточенной силой.

§ 2. Силы и напряжения

Все внешние силы, действующие на твердое тело, можно разбить на две группы: поверхностные и объемные.

Поверхностные силы возникают в результате контакта тел. Они распределены по поверхности тела, например сила давления воды на плотину, сила давления фундамента здания на грунт и т. д. Поверхностные силы характеризуются *интенсивностью*, т. е. значением силы, приходящейся на единицу площади поверхности, по которой распределена эта сила. Если размеры площади, на которой действует сила, малы по сравнению с размерами тела, то такой площадью можно пренебречь и считать, что сила приложена в точке. Такую силу называют *сосредоточенной*.

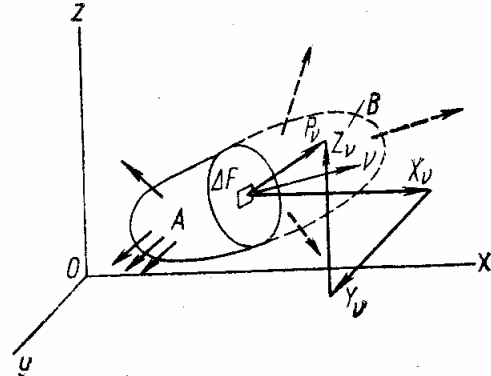


Рис. 4

Объемные силы действуют в каждой точке тела. К ним относятся собственная масса тела, силы инерции.

На рис. 4 в прямоугольной (декартовой) системе координат $xuyz$ изображено твердое тело произвольной формы, находящееся в равновесии под действием поверхностных и объемных сил. Для исследования внутренних сил, возникающих в теле, применим метод сечений. Мысленно рассечем тело произвольной плоскостью на две части A и B и часть B отбросим. Положение плоскости сечения в пространстве определяется направлением нормали ν , внешней по отношению к оставшейся части A . Действие отброшенной части можно заменить силой S_F , приложенной к центру тяжести сечения, и парой сил с моментом S_M . Сила S_F и пара сил S_M определяются из условий равновесия части A и называются усилиями в рассматриваемом сечении.

Усилия S_F и S_M представляют собой равнодействующие элементарных сил ΔS по всем бесконечно малым площадям ΔF , на которые можно разбить рассматриваемое сечение. Интенсивность внутренних сил называется *напряжением*. Поэтому отношение $\Delta S / (\Delta F)$ будет средним напряжением на площади ΔF , а переходя к пределу при ΔF , стремящемся к нулю, получим *истинное*, или *полное*, напряжение в данной точке на площадке с нормалью ν :

$$p_\nu = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta F}.$$

Полное напряжение ρ_v (см. рис. 4) в общем случае не совпадает с направлением нормали v . Поэтому кроме величины полного напряжения необходимо знать его направление в пространстве. Удобнее вместо полного напряжения ρ_v рассматривать его составляющие по координатным осям X_v, Y_v, Z_v . Обозначение X_v читается так: проекция на ось x полного напряжения на площадке с внешней нормалью v . Составляющие полного напряжения показаны на рис. 4.

В сечениях, параллельных координатным плоскостям, индекс v можно заменить индексом координатной оси, нормальной к сечению. Например, в сечении, параллельном координатной плоскости yOz (рис. 5), внешняя нормаль совпадает по направлению с осью x , и составляющие напряжения обозначаются так: X_x, Y_x, Z_x .

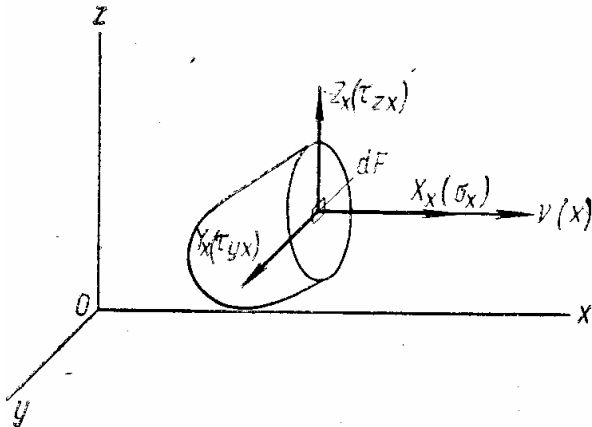


Рис. 5

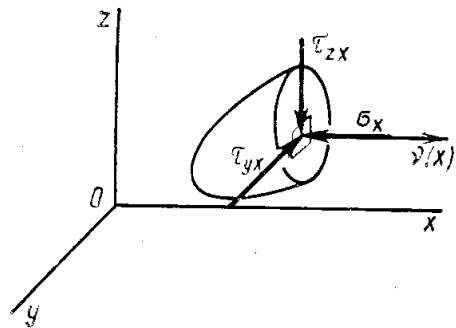


Рис. 6

Составляющая X_x направлена перпендикулярно сечению и называется *нормальным напряжением*. Составляющие Y_x, Z_x , лежащие в плоскости сечения, называются *касательными напряжениями*.

Для обозначения нормальных и касательных напряжений наравне с рассмотренной могут применяться также и другие системы обозначений. Например, нормальные напряжения обозначают греческой буквой σ , а касательные — греческой буквой τ . Так, нормальное напряжение X_x можно обозначить σ_x , где индекс x обозначает нормаль к сечению. Касательные напряжения Y_x и Z_x в этом сечении можно обозначить соответственно τ_{yx} и τ_{zx} , где первый индекс означает направление касательного напряжения, а второй — нормаль к сечению.

Из девяти составляющих напряжений на всех трех площадках, параллельных координатным плоскостям, три составляющие являются нормальными напряжениями: $X_x = \sigma_x, Y_y = \sigma_y, Z_z = \sigma_z$, а шесть составляющих — касательными:

$$\begin{aligned} Y_x &= \tau_{yx}, & Z_y &= \tau_{zy}, & X_z &= \tau_{xz}, \\ X_y &= \tau_{xy}, & Y_z &= \tau_{yz}, & Z_x &= \tau_{zx}. \end{aligned}$$

В дальнейшем изложении используется вторая система обозначения напряжений.

Для напряжения принято следующее правило знаков. Нормальное напряжение считается положительным при растяжении. В этом слу-

чае оно совпадает с направлением внешней нормали к площадке, на которой действует.

Касательное напряжение считается положительным, если на площадке, нормаль к которой совпадает с направлением параллельной ей координатной оси, оно направлено в сторону соответствующей этому напряжению положительной координатной оси. Если внешняя нормаль совпадает с отрицательным направлением параллельной ей координатной оси, то положительное касательное напряжение направлено в сторону соответствующей ему отрицательной координатной оси. На рис. 5 показаны положительные, а на рис. 6 — отрицательные напряжения.

Напряжения, возникающие в твердом теле, в общем случае могут быть различными в разных точках тела, т. е. являются функциями координат точек:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z);$$

$$\sigma_y = \sigma_y(x, y, z);$$

$$\sigma_z = \sigma_z(x, y, z);$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z);$$

.....

§ 3. Дифференциальные уравнения равновесия

Выделим из тела, находящегося под действием внешних сил, бесконечно малый параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям и ребрам длиной dx , dy и dz (рис. 7). Установим зависимость между составляющими напряжений, действующих на гранях этого параллелепипеда. На каждой грани имеем три составляющие, параллельные координатным осям. Всего на шести гранях получаем 18 составляющих напряжений.

Составляющие напряжений являются функциями трех координат. Поэтому, например, нормальное напряжение σ_x в точке с координатами x , y , z можно обозначать $\sigma_x(x, y, z)$. В точке, отстоящей от рассматриваемой на бесконечно малом расстоянии, напряжение σ_x с точностью до бесконечно малых первого порядка может быть разложено в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x + dx, y + dy, z + dz) = & \sigma_x(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial x} dx + \\ & + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \sigma_x(x, y, z)}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Для площадок, параллельных плоскости yOz , изменяется только координата x , а приращения $dy = dz = 0$. Поэтому на грани параллелепипеда, совпадающей с координатной плоскостью yOz , нормальное напряжение обозначено σ_x , а на параллельной грани, отстоящей от первой на бесконечно малом расстоянии dx , нормальное напряжение обозначено $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. Аналогично связаны напряжения и на остальных парах параллельных граней параллелепипеда. Таким об-

разом, из 18 составляющих напряжения неизвестными являются только девять: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$.

Кроме напряжений на параллелепипед будут действовать объемные силы. Обозначим проекции на координатные оси объемных сил, отне-

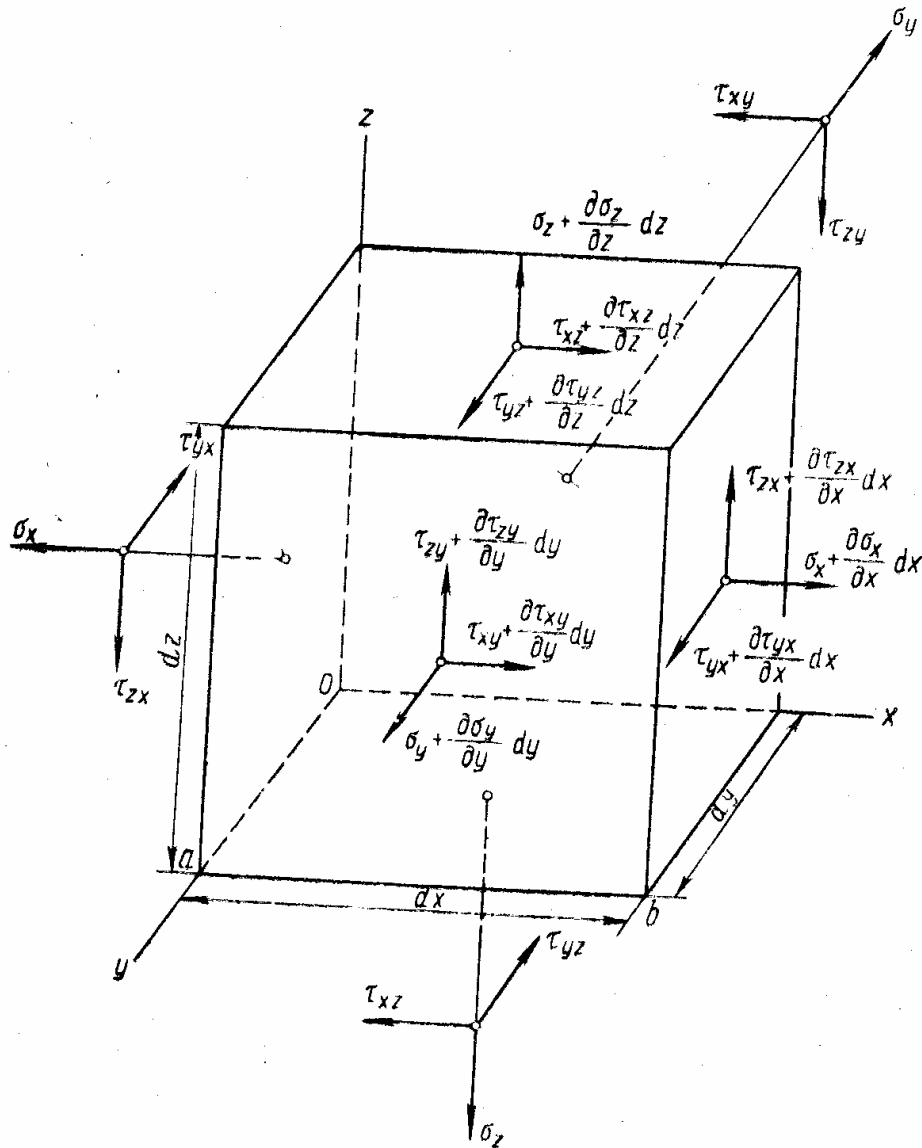


Рис. 7

сенных к единице объема тела, X, Y и Z . Тогда составляющие объемных сил, действующие в объеме рассматриваемого параллелепипеда будут равны $Xdx dy dz, Ydx dy dz, Zdx dy dz$.

Для тела, находящегося в равновесии, должны удовлетворяться шесть уравнений статики: три уравнения проекций на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей.

Рассмотрим уравнение проекций на ось x . На нее проецируются только силы, параллельные этой оси. Умножая каждое напряжение

на площадь грани, по которой оно действует, и переходя таким образом от напряжений к силам, в результате проецирования получаем

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dzdx - \\ - \tau_{xy} dzdx + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{xz} dxdy + X dxdydz = 0.$$

После раскрытия скобок, приведения подобных членов и деления на объем $dV = dxdydz$ окончательно находим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Аналогично можно составить уравнения проекций на оси y и z . Таким образом, получим три дифференциальных уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Переходим к составлению уравнений моментов относительно координатных осей. Возьмем, например, уравнение моментов относительно оси y . Суммируя моменты всех сил относительно этой оси, получаем

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dz}{2} - \sigma_x dydz \frac{dz}{2} + \sigma_z dxdy \frac{dx}{2} - \left(\sigma_z + \right. \\ \left. + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dxdy \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dxdydz - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \right) dydzdx - \\ - \tau_{xy} dzdx \frac{dz}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dzdx \frac{dz}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy \right) dzdx \frac{dx}{2} + \\ + \tau_{zy} dzdx \frac{dx}{2} + X dxdydz \frac{dz}{2} - Z dxdydz \frac{dx}{2} = 0. \quad (a)$$

Приведя в выражении (a) подобные члены и отбросив величины четвертого порядка малости, после деления на объем рассматриваемого параллелепипеда получим

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Составляя уравнения моментов относительно осей z и x , получаем еще два аналогичных соотношения. Таким образом, из уравнений моментов вытекают три равенства

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad (1.2)$$

представляющие собой закон парности касательных напряжений. Он гласит: по двум взаимно перпендикулярным площадкам составляющие касательных напряжений, перпендикулярные линии пересечения этих площадок, равны между собой.

Вследствие парности касательных напряжений вместо девяти неизвестных составляющих напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке тела, остается только шесть:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x(x, y, z); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z); \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z); \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z); \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Для отыскания шести неизвестных функций (1.3) имеем только три дифференциальных уравнения равновесия (1.1).

Следовательно, уравнений статики недостаточно и задача теории упругости по определению напряжений в бесконечно малом объеме является статически неопределимой. Недостающие уравнения можно получить, рассматривая деформации тела и учитывая его физические свойства.

§ 4. Напряжения на наклонных площадках. Условия на поверхности

Для исследования напряженного состояния в любой точке тела необходимо уметь находить напряжения на произвольной площадке, наклоненной к координатным осям. Положение в пространстве бесконечно малой площадки abc , изображенной на рис. 8, определяется

нормалью ν , направляющие косинусы которой

$$\begin{aligned} \cos(x, \nu) = l, \quad \cos(y, \nu) = m, \\ \cos(z, \nu) = n. \end{aligned}$$

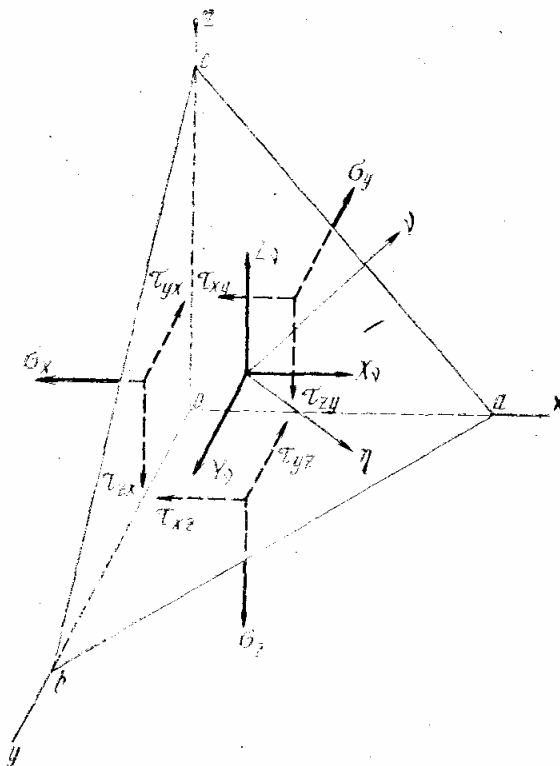


Рис. 8

Наклонная площадка abc вместе с координатными площадками Oab , Obc и Oca образует бесконечно малый тетраэдр. Обозначим площадь грани abc через dF ; тогда площади остальных граней тетраэдра определим как проекции площади грани abc на соответствующие координатные плоскости: пл. $Obc = dF \cdot l$, пл. $Oca = dF \cdot m$, пл. $Oab = dF \cdot n$.

На рассматриваемый тетраэдр действуют следующие силы: на координатных площадках — силы от шести составляющих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ и τ_{zx} , на площадке abc — силы от трех составляющих полного напряжения X_ν, Y_ν и Z_ν и по всему объему — составляющие объемной силы X, Y, Z (последние на рис. 8 не показаны).

Проецируя все силы на ось x , получаем

$$X_\nu dF - \sigma_x dFl - \tau_{xy} dFm - \tau_{xz} dFn + X dV = 0.$$

Здесь последнее слагаемое имеет третий порядок малости (dV), а остальные — второй (dF). Пренебрегая слагаемым третьего порядка малости и деля все остальные слагаемые на dF , находим

$$X_v = \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n.$$

Составляя уравнения проекций всех сил, действующих на тетраэдр $Oabc$, на оси y и z , получаем еще два уравнения. Таким образом, приходим к следующим трем уравнениям равновесия элементарного тетраэдра:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4) позволяют определять составляющие напряжения на любой наклонной площадке с нормалью v с помощью шести составляющих напряжений на площадках, параллельных координатным плоскостям.

Если площадка abc совпадает с поверхностью тела, то составляющие напряжения X_v , Y_v и Z_v соответствуют составляющим внешних сил, действующих на поверхности тела. Тогда уравнения (1.4) называют *условиями на поверхности тела*. Они связывают внешние силы с внутренними.

Удовлетворение уравнениям (1.1) и (1.4) является необходимым и достаточным признаком равновесия всего тела под действием заданных внешних сил. Действительно, если составляющие напряжений (1.3) удовлетворяют уравнениям равновесия (1.1) во всех точках внутри тела, то все точки внутри тела находятся в равновесии. Если составляющие напряжений (1.3) удовлетворяют уравнениям (1.4) в точках у поверхности тела, то все точки тела у поверхности находятся в равновесии. Если же составляющие напряжений (1.3) одновременно удовлетворяют уравнениям (1.1) и (1.4), то в равновесии находится все тело в целом.

И наоборот, если тело находится в равновесии под действием заданных внешних сил, то во всех точках внутри тела должны обращаться в тождества уравнения (1.1), а во всех точках на поверхности тела — уравнения (1.4).

§ 5. Исследование напряженного состояния в точке тела. **Главные напряжения. Инварианты напряженного состояния**

Продолжим исследование напряженного состояния в точке тела. Уравнениями (1.4) можно воспользоваться для вычисления напряжений на любой наклонной площадке в любой точке внутри тела, если известны составляющие напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам, параллельным координатным плоскостям: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} .

Равнодействующая составляющих напряжения на наклонной площадке X_v , Y_v и Z_v называется полным напряжением на этой площадке и определяется как геометрическая сумма составляющих:

$$\rho_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}. \quad (1.5)$$

Разложим полное напряжение ρ_v на составляющую по нормали к площадке (нормальное напряжение) и составляющую в плоскости площадки (касательное напряжение). Нормальное напряжение равно сумме проекций составляющих полного напряжения, параллельных координатным осям, на направление нормали:

$$\sigma_v = X_v l + Y_v m + Z_v n. \quad (1.6)$$

Подставляя сюда значение составляющих X_v , Y_v , Z_v из (1.4), получаем

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \quad (1.7)$$

Формула (1.7) позволяет определять нормальные напряжения на любой наклонной площадке с помощью шести составляющих напряжений на трех площадках, параллельных координатным плоскостям.

Касательное напряжение на этой площадке определится как геометрическая разность полного и нормального напряжений:

$$\tau_v^2 = \rho_v^2 - \sigma_v^2. \quad (1.8)$$

Последняя формула дает только величину касательного напряжения, но не указывает его направление в плоскости площадки.

Найдем составляющую касательного напряжения в плоскости площадки с нормалью v по заданному направлению η с направляющими косинусами l_1 , m_1 , n_1 (см. рис. 8). Так как направления v и η взаимно перпендикулярны, то между их направляющими косинусами существует известное из аналитической геометрии соотношение

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0. \quad (1.9)$$

Искомое касательное напряжение равно сумме проекций составляющих напряжений X_v , Y_v , Z_v на направление η :

$$\tau_{\eta v} = X_v l_1 + Y_v m_1 + Z_v n_1.$$

Подставляя сюда выражения составляющих напряжения из (1.4), находим

$$\begin{aligned} \tau_{\eta v} = & \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \tau_{xy} (lm_1 + l_1 m) + \\ & + \tau_{yz} (mn_1 + m_1 n) + \tau_{zx} (nl_1 + n_1 l). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Формула (1.10) позволяет определять касательные напряжения на любой наклонной площадке в заданном направлении с помощью шести составляющих напряжений на трех площадках, параллельных координатным плоскостям.

Площадка, на которой касательные напряжения равны нулю, называется *главной*.

Приняв $\tau_v = 0$, из равенства (1.8) получим $\rho_v = \sigma_v$, т. е. на главной площадке полное напряжение совпадает с нормальным по величине и направлению.

Из условия $\tau_v = 0$ определим величину главных напряжений и положение главных площадок. Обозначив искомое главное напряжение через σ и проецируя его на координатные оси, находим составляющие главного напряжения, параллельные координатным осям:

$$\sigma l = X_v; \quad \sigma m = Y_v; \quad \sigma n = Z_v. \quad (a)$$

Сравнивая соотношения (a) и (1.4), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; & \sigma m &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ \sigma n &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} (b)$$

Кроме того, имеем известное из аналитической геометрии соотношение между направляющими косинусами

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (1.11)$$

Последние четыре уравнения содержат четыре неизвестных: главное напряжение и три его направляющих косинуса.

Представим уравнения (b) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= 0; \\ \tau_{yx} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{yz} n &= 0; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0. \end{aligned} \right\} (в)$$

Однородная система уравнений (в) не допускает тривиального решения $l = m = n = 0$, так как оно противоречит условию (1.11). Для существования других решений этой системы, при которых хотя бы один из направляющих косинусов отличен от нуля, необходимо, чтобы определитель системы уравнений (в) был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем этот определитель:

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + \tau_{yx}\tau_{zy}\tau_{xz} + \tau_{zx}\tau_{xy}\tau_{yz} - \\ & - (\sigma_y - \sigma)\tau_{zx}^2 - (\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 = 0. \end{aligned}$$

После перемножения и группировки по степеням σ получим кубическое уравнение

$$\begin{aligned} &\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \\ & - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0, \end{aligned}$$

или короче

$$\sigma^3 - S_1\sigma^2 - S_2\sigma - S_3 = 0, \quad (г)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ S_2 &= -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2; \\ S_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} (1.12)$$

Решение этого уравнения дает три корня: σ_1 , σ_2 и σ_3 ; все они оказываются вещественными. Наибольший корень по алгебраическому значению принято обозначать σ_1 , а наименьший — σ_3 . Таким образом, в каждой точке напряженного тела всегда можно найти три главных напряжения: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Внесем одно из значений главных напряжений σ_i ($i = 1, 2, 3$) в уравнение (в). Решая после этого любые два из указанных уравнений совместно с уравнением (1.11), найдем направляющие косинусы l_i , m_i и n_i для одной из главных площадок.

Исследуем взаимное расположение главных площадок. Обозначив главные напряжения σ_1 и σ_2 и давая направляющим косинусам, соответствующим этим напряжениям, те же индексы по формулам (в), получим:

$$\begin{array}{l} (\sigma_x - \sigma_1) l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1 = 0, \\ \tau_{yx} l_1 + (\sigma_y - \sigma_1) m_1 + \tau_{yz} n_1 = 0, \\ \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} m_1 + (\sigma_z - \sigma_1) n_1 = 0; \\ (\sigma_x - \sigma_2) l_2 + \tau_{xy} m_2 + \tau_{xz} n_2 = 0, \\ \tau_{yx} l_2 + (\sigma_y - \sigma_2) m_2 + \tau_{yz} n_2 = 0, \\ \tau_{zx} l_2 + \tau_{zy} m_2 + (\sigma_z - \sigma_2) n_2 = 0. \end{array} \left| \begin{array}{l} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \\ -l_1 \\ -m_1 \\ -n_1 \end{array} \right. \quad (д)$$

Умножая каждое из уравнений (д) на направляющие косинусы, как указано в столбце справа от уравнений, после сложения найдем

$$(\sigma_2 - \sigma_1) (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0.$$

Если $\sigma_2 \neq \sigma_1$, то получаем условие перпендикулярности главных площадок, на которых действуют напряжения σ_2 и σ_1 :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Аналогично можно доказать перпендикулярность главных площадок, на которых действуют напряжения σ_3 и σ_2 , а также σ_1 и σ_3 . Таким образом, в каждой точке напряженного тела можно выделить по крайней мере три взаимно перпендикулярные главные площадки.

Величины главных напряжений не зависят от положения координатных осей x , y , z . Если вокруг заданной точки вырезать несколько элементарных параллелепипедов с различным направлением граней и подставить значения составляющих напряжений для каждого из параллелепипедов в уравнение (г), то для всех параллелепипедов должны получиться одни и те же значения главных напряжений. Следовательно, корни кубического уравнения (г) не зависят от выбора координатной системы и коэффициенты уравнения должны сохранять постоянные значения при преобразовании осей, т. е. они являются инвариантами. Поэтому величины S_1 , S_2 и S_3 называются соответственно первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния. Их можно выразить и через главные напряжения, для чего в формулах (1.12) касательные напряжения следует положить равными нулю, а нормальным дать индексы главных напряжений. Тогда

$$S_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; S_2 = -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1; S_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (1.13)$$

В теории напряжений инварианты следует рассматривать как основные характеристики напряженного состояния в точке; составляющие же напряжений, как связанные с осями координат, являются вспомогательными.

§ 6. Тензор напряжений. Интенсивность напряжений. Наибольшие касательные напряжения

Через каждую точку тела можно провести сколько угодно площадок, наклоненных ко всем трем координатным плоскостям. Из формулы (1.4) следует, что для определения напряжений на любой наклонной площадке достаточно знать напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках. Таким образом, девять составляющих напряжений $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$ (из них шесть попарно равны) полностью определяют напряженное состояние в точке.

На каждой координатной площадке три составляющих образуют вектор полного напряжения: на площадке с нормалью x — вектор p_x , на площадке с нормалью y — p_y и на площадке с нормалью z — p_z . Совокупность трех векторов p_x, p_y и p_z , определяемых девятью составляющими, которые при перемене координатных осей преобразуются по формуле (1.4), называется *аффинным ортогональным тензором второго ранга**. Тензором первого ранга является вектор. В дальнейшем изложении сокращенно будем называть его просто тензором, а девять составляющих — компонентами тензора.

Тензор, компонентами которого являются напряжения, описывает напряженное состояние в точке и называется *тензором напряжений*. Он записывается в виде следующей матрицы:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

На основании закона парности касательных напряжений компоненты тензора напряжений, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой, поэтому тензор напряжений T_{σ} является симметричным.

В каждой точке упругого тела будет свой тензор напряжений, следовательно, в теле имеется поле тензоров напряжений.

Из свойств тензоров отметим два.

1. Тензоры можно складывать и вычитать. Суммой двух тензоров является новый тензор, компоненты которого представляют собой сумму соответствующих компонентов слагаемых тензоров.

2. Тензор можно умножать на скаляр. Произведением тензора на скаляр λ является новый тензор, компоненты которого в λ раз больше соответствующих компонентов умножаемого тензора.

*Аффинные (смежные, соседние) преобразования — преобразования плоскости или пространства, при которых прямые переходят в прямые, сохраняя свою параллельность.

Рассмотрим напряженное состояние, при котором на трех взаимно перпендикулярных площадках действуют только три одинаковых главных напряжения σ_0 , равные среднему напряжению в данной точке тела:

$$\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3. \quad (1.15)$$

Такое напряженное состояние описывается тензором

$$T_\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

который называется *шаровым тензором напряжений*.

Название «шаровой тензор» связано с предложенным Ламе геометрическим представлением напряженного состояния в точке. Если в системе координат, совпадающей с главными осями, для каждой площадки, проходящей через начало координат, построить вектор полного напряжения p_v , то концы этих векторов опишут поверхность эллипсоида, который называется *эллипсоидом напряжений* или *эллипсоидом Ламе*.

Три полуоси эллипсоида напряжений равны по длине трем главным напряжениям. В случае напряженного состояния, описываемого шаровым тензором (1.16), все три главных напряжения равны между собой и эллипсоид напряжений обращается в шар.

Используя второе из указанных свойств тензоров, шаровой тензор (1.16) можно представить в виде

$$T_\sigma^0 = \sigma_0 T_1, \quad (1.17)$$

где

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

представляет собой так называемый *единичный тензор*.

Вычитая из тензора напряжений (1.14) шаровой тензор (1.16), получаем новый тензор, называемый *девиатором напряжений*:

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Таким образом, тензор напряжений в каждой точке может быть представлен в виде суммы двух тензоров: шарового тензора напряжений и девиатора напряжений (рис. 9), т. е.

$$T_\sigma = \sigma_0 T_1 + D_\sigma. \quad (1.20)$$

Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор имеет большое принципиальное значение при исследовании поведения упругих и пластических тел под нагрузкой. Шаровой тензор $\sigma_0 T_1$ выделяет из напряженного состояния равномерное всестороннее растя-

жение (сжатие), при котором изменяется лишь объем данного элемента тела без изменения формы. Девiator напряжений D_σ характеризует состояние сдвига, при котором изменяется форма элемента без изменения его объема. Следовательно, девiator напряжений указывает отклонение (девиацию) рассматриваемого напряженного состояния от всестороннего растяжения (сжатия) или отклонение приобретенной формы тела от первоначальной. Как показывают опыты, материалы по-разному реагируют на всестороннее равномерное сжатие и на напряжение сдвига.

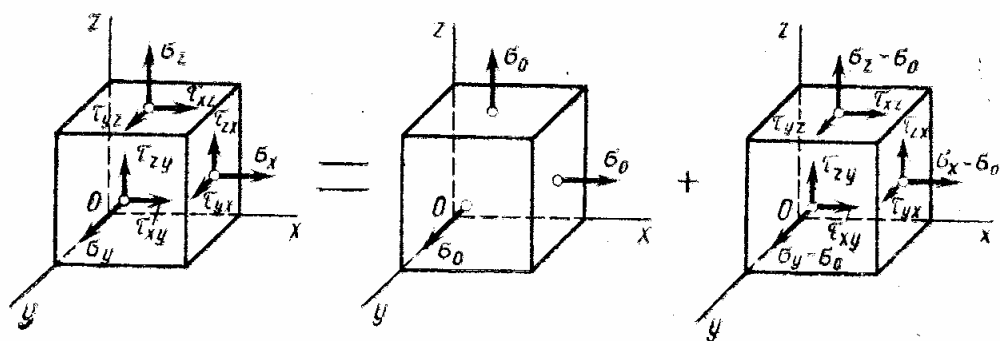


Рис. 9

Инварианты напряженного состояния (1.12) или (1.13) можно рассматривать состоящими из компонентов тензора напряжений, поэтому их называют также *инвариантами тензора напряжений*.

По аналогии с инвариантами тензора напряжений построим инварианты девiatorа напряжений (последние будем отмечать звездочкой). Первый инвариант девiatorа напряжений

$$S_1^* = (\sigma_x - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_z - \sigma_0) = 3\sigma_0 - 3\sigma_0 = 0.$$

Второй инвариант девiatorа напряжений

$$S_2^* = -(\sigma_x - \sigma_0)(\sigma_y - \sigma_0) - (\sigma_y - \sigma_0)(\sigma_z - \sigma_0) - (\sigma_z - \sigma_0)(\sigma_x - \sigma_0) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2.$$

После подстановки сюда выражения среднего напряжения из формулы (1.15) и упрощения получаем

$$S_2^* = 1/6 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (1.21)$$

Второй инвариант девiatorа напряжений играет существенную роль в теории пластичности, где обычно рассматривают величину, пропорциональную квадратному корню из этого инварианта, равную

$$\tau_i = 1/3 \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.22)$$

и называемую *интенсивностью касательных напряжений*. Она представляет собой касательное напряжение на октаэдрических площадках, т. е. на площадках, равнонаклоненных ко всем трем главным напряжениям.

Вместо интенсивности касательных напряжений часто рассматривают пропорциональную ей величину

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 - 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (1.23)$$

называемую *интенсивностью напряжений*. Числовой коэффициент в формуле (1.23) выбран так, чтобы при простом растяжении интенсивность напряжений была равна нормальному напряжению. Действительно, при осевом растяжении $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

Подставляя эти величины в (1.23), получаем

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2} = \sigma$$

В теории пластичности необходимо знать величину наибольших касательных напряжений. Из курса сопротивления материалов известно, что для каждой совокупности площадок, параллельных трем главным напряжениям, можно найти экстремальные значения касательных напряжений

$$\tau_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2; \tau_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2; \tau_{31} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2, \quad (1.24)$$

обычно называемых *главными касательными напряжениями*. Одно из этих значений наибольшее:

$$\tau_{\max} = |\tau_{31}| = (\sigma_1 - \sigma_3)/2. \quad (1.25)$$

Введем необходимое для дальнейшего изложения понятие *направляющего тензора напряжений*. Под ним будем подразумевать девиатор напряжений, каждый компонент которого разделен на интенсивность касательных напряжений:

$$\bar{D}_\sigma = \frac{D_\sigma}{\tau_i} = \left\{ \begin{array}{ccc} (\sigma_x - \sigma_0)/\tau_i & \tau_{xy}/\tau_i & \tau_{xz}/\tau_i \\ \tau_{yx}/\tau_i & (\sigma_y - \sigma_0)/\tau_i & \tau_{yz}/\tau_i \\ \tau_{zx}/\tau_i & \tau_{zy}/\tau_i & (\sigma_z - \sigma_0)/\tau_i \end{array} \right\}. \quad (1.26)$$

Направляющий тензор напряжений определяет только главные направления напряжений и соотношение между компонентами тензора напряжений, но не определяет их значения, так как компоненты направляющего тензора напряжений — величины безразмерные.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

§ 1. Составляющие перемещения и деформации. Зависимость между ними

Исследуем деформацию упругого тела. Для ее определения необходимо сравнить положение точек тела до и после приложения нагрузки. На рис. 10 показаны тело и точка A с координатами x, y, z . Под действием нагрузки точка A переместится в новое положение A' с коор-

динатами x', y', z' . Вектор AA' называется *вектором перемещения точки A*.

Различают два вида перемещений: перемещение всего тела как единого целого без его деформирования и перемещение, связанное с деформированием тела. Перемещения первого вида изучаются в теоретической механике как перемещения абсолютно твердого тела. В теории упругости рассматриваются только перемещения, связанные с деформированием тела.

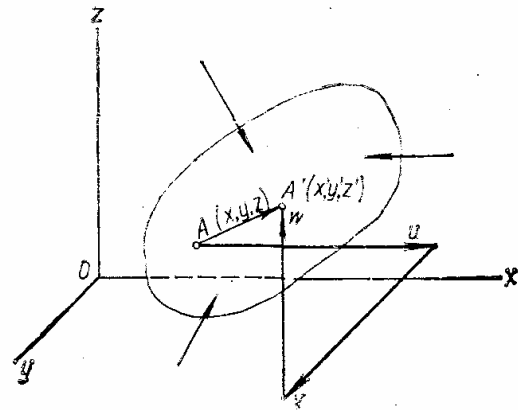


Рис. 10

Будем считать, что рассматриваемое тело закреплено так, чтобы оно не могло перемещаться как абсолютно твердое тело. Обозначим проекции вектора перемещения точки A на координатные оси через u, v, w . Они равны разности соответствующих координат точек A и A' :

$$u = x' - x; v = y' - y; w = z' - z$$

и являются функциями координат:

$$u = u(x, y, z); v = v(x, y, z); w = w(x, y, z).$$

Разница в значениях перемещений различных точек тела вызывает его деформирование. Бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx, dy, dz , вырезанный из упругого тела около произвольной точки A , вследствие различных перемещений его точек деформируется таким образом, что изменяется длина его ребер и искажаются первоначально прямые углы между гранями.

На рис. 11 изображены два ребра этого параллелепипеда: ребро AB , параллельное оси x , и ребро AC , параллельное оси z . Длина ребра AB равна dx , ребра AC — dz . После деформирования точки A, B и C займут новые положения: A', B', C' . При этом точка A получит перемещение, составляющие которого в плоскости чертежа равны u и w . Точка B , отстоящая от точки A на бесконечно малом расстоянии dx , получит перемещение, составляющие которого будут отличаться от составляющих перемещения точки A на бесконечно малую величину за счет изменения координаты x :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; w + \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

Составляющие перемещения точки C будут отли-

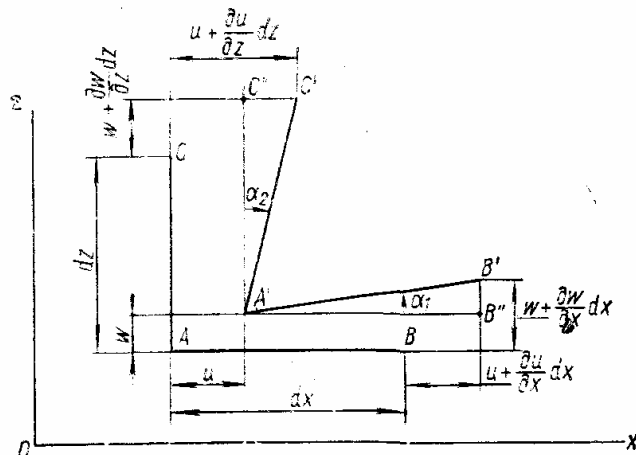


Рис. 11

чатся от составляющих перемещения точки A на бесконечно малую величину за счет изменения координаты z :

$$u + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \quad w + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Длина проекции ребра AB на ось x после деформирования

$$A' B'' = dx - u + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (2.1)$$

Проекция абсолютного удлинения ребра AB на ось x

$$\Delta AB = A' B'' - AB = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Относительное удлинение вдоль оси x

$$\epsilon_x = \Delta AB / AB = \partial u / \partial x \quad (a)$$

называется *линейной деформацией по направлению оси x* .

Аналогично получим линейные деформации по направлениям координатных осей y и z :

$$\epsilon_y = \partial v / \partial y; \quad \epsilon_z = \partial w / \partial z. \quad (б)$$

Итак, линейная деформация по любому направлению равна частной производной составляющей перемещения в этом направлении по переменной в том же направлении.

Рассмотрим изменения углов между ребрами параллелепипеда (рис. 11). Тангенс угла поворота ребра AB в плоскости xOz

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B' B''}{A' B''} = \frac{[w + (\partial w / \partial x) dx] - w}{dx (1 + \partial u / \partial x)} = \frac{\partial w / \partial x}{1 + \epsilon_x}.$$

Ограничиваясь рассмотрением только малых деформаций, можно положить $\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1$ и пренебречь линейной деформацией ϵ_x ввиду малости по сравнению с единицей. Тогда

$$\alpha_1 = \partial w / \partial x.$$

Аналогично находим угол поворота ребра AC в той же плоскости:

$$\alpha_2 = \partial u / \partial z. \quad (2.2)$$

Угол сдвига в плоскости xOz , т. е. искажение прямого угла BAC , называется *угловой деформацией* и определяется как сумма углов поворота ребер AB и AC :

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z. \quad (в)$$

Аналогично найдем угловые деформации в двух других координатных плоскостях:

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x; \quad \gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y. \quad (г)$$

Итак, угловая деформация в любой плоскости равна сумме частных производных составляющих перемещения в этой плоскости по переменным в перпендикулярных направлениях.

Формулы (а), (б), (в) и (г) дают шесть основных зависимостей составляющих линейных и угловых деформаций от составляющих перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= du/dx, & \gamma_{xy} &= du/dy + dv/dx, \\ \varepsilon_y &= dv/dy, & \gamma_{yz} &= dv/dz + d\omega/dy; \\ \varepsilon_z &= d\omega/dz, & \gamma_{zx} &= d\omega/dx + du/dz. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Эти геометрические соотношения были выведены Коши и иногда называются уравнениями Коши.

В пределе, когда длины ребер параллелепипеда стремятся к нулю, формулы (2.3) определяют линейные и угловые деформации в окрестности точки A .

Правило знаков для составляющих деформации.

1. Положительным линейным деформациям отвечают удлинения по соответствующим направлениям, а отрицательным — укорочения.

2. Положительным угловым деформациям соответствует уменьшение углов между положительными направлениями координатных осей, а отрицательным — увеличение тех же углов.

§ 2. Объемная деформация

В общем случае деформирования объем тела изменяется. Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед объемом $dV = dx dy dz$. С точностью до бесконечно малых величин высшего порядка можно считать, что изменение этого объема связано только с изменением длины ребер, но не с угловыми деформациями.

Длина ребра AB (см. рис. 11), первоначально равная dx , после деформирования согласно формуле (2.1) составит

$$dx_1 = dx (1 + du/dx).$$

Воспользовавшись первым уравнением (2.3), получим

$$dx_1 = dx (1 + \varepsilon_x). \quad (2.4)$$

Аналогично вычисляются длины двух других ребер после деформирования:

$$dy_1 = dy (1 + \varepsilon_y); \quad dz_1 = dz (1 + \varepsilon_z). \quad (2.5)$$

Объем параллелепипеда после деформирования найдем как произведение новых длин ребер:

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dx (1 + \varepsilon_x) dy (1 + \varepsilon_y) dz (1 + \varepsilon_z).$$

Раскрывая скобки, получаем

$$dV_1 = dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z).$$

Пренебрегая в скобках величинами второго и третьего порядков малости и учитывая, что $dx dy dz = dV$, находим

$$dV_1 = dV (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Обозначая относительное изменение объема $(dV_1 - dV)/dV$ через θ , получаем

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (2.6)$$

Таким образом, объемная деформация равна сумме линейных деформаций по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

С помощью уравнений (2.3) объемную деформацию можно выразить через составляющие перемещения:

$$\theta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z. \quad (2.7)$$

§ 3. Уравнения неразрывности деформаций

Геометрические соотношения Коши (2.3) связывают шесть составляющих деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ и три составляющих перемещения u, v, w . Если заданы три составляющие перемещения, то шесть составляющих деформации определяются из этих уравнений однозначно, т. е. заданным трем составляющим перемещения соответствует единственная система шести составляющих деформации.

Если же заданы шесть составляющих деформации, то для определения трех составляющих перемещения необходимо проинтегрировать шесть дифференциальных уравнений (2.3) в частных производных. При произвольном выборе составляющих деформации шесть уравнений с тремя неизвестными не всегда могут быть решены однозначно. Поэтому между шестью составляющими деформации должны существовать определенные зависимости. Чтобы вывести эти зависимости, необходимо исключить составляющие перемещения из уравнений (2.3). Первое из уравнений (2.3) дважды продифференцируем по y :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

а второе — дважды по x :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

и полученные результаты сложим:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (a)$$

Выражение, стоящее в скобках, согласно уравнениям (2.3), определяет угловую деформацию γ_{xy} . Тогда вместо соотношения (a) получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (b)$$

Аналогично можно установить зависимость между деформациями и в двух других координатных плоскостях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Уравнения (б) и (в) показывают, что если заданы две линейные деформации во взаимно перпендикулярных направлениях, то угловую деформацию в плоскости этих линейных деформаций нельзя задать произвольно.

Трех уравнений (б) и (в) оказывается недостаточно для обеспечения однозначности перемещений, так как они получены дифференцированием. При дифференцировании порядок дифференциального уравнения повышается и возможно появление новых решений, не удовлетворяющих первоначальному уравнению. Чтобы не получалось неприемлемых решений, необходимо иметь дополнительные условия.

Продифференцируем три последних уравнения (2.3) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} ; \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} ; \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} . \end{aligned} \right\}$$

Сложим две первые строки и вычтем третью:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} .$$

Продифференцируем это выражение еще раз по y и, учитывая, что

$$\frac{\partial^3 v}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} ,$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} \quad (\Gamma)$$

Аналогично можно получить еще два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} ; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} . \end{aligned} \right\} \quad (\Delta)$$

Эти уравнения свидетельствуют о том, что если заданы три угловые деформации в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, то линейные деформации не могут быть заданы произвольно.

Итак, получена следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\
 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Необходимость существования полученных зависимостей можно обосновать и геометрическим путем. Представим себе тело разрезанным на малые параллелепипеды. Если каждый из этих параллелепипедов получит произвольные деформации, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное твердое тело: в некоторых точках после деформирования возникнут бесконечно малые разрывы. Уравнения же (2.8) устанавливают такие зависимости между составляющими деформации, при удовлетворении которых тело и после деформирования остается сплошным, или непрерывным. Поэтому уравнения (2.8) можно рассматривать как следствие сделанного ранее допущения о сплошности тела. Они называются *уравнениями неразрывности деформаций Сен-Венана*.

§ 4. Тензор деформаций. Главные деформации. Интенсивность деформаций

Между теорией напряжений и теорией деформаций существует математическая аналогия: все формулы теории деформаций можно получить из соответствующих формул теории напряжений, если в последних нормальные напряжения заменить линейными деформациями, а касательные напряжения — половинами угловых деформаций.

Так, линейная деформация по произвольному направлению ν , заданному направляющими косинусами l , m и n , определяется формулой, аналогичной зависимости (1.7):

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl, \quad (2.9)$$

а угловая деформация в произвольной плоскости $\nu\eta$, заданной векторами ν и η с направляющими косинусами l, m, n и l_1, m_1, n_1 , определяется формулой, аналогичной зависимости (1.10):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \gamma_{\nu\eta} &= \varepsilon_x ll_1 + \varepsilon_y mm_1 + \varepsilon_z nn_1 + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (lm_1 + l_1 m) + \\
 &+ \frac{1}{2} \gamma_{yz} (mn_1 + m_1 n) + \frac{1}{2} \gamma_{zx} (nl_1 + n_1 l).
 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Аналогично тензору напряжений (1.14) для описания деформированного состояния в точке можно записать *тензор деформаций*

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

который может быть разложен на шаровой тензор и девиатор:

$$T_{\varepsilon} = \varepsilon_0 T_1 + D_{\varepsilon}, \quad (2.12)$$

здесь

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3 = \theta/3 \quad (2.13)$$

представляет собой среднюю деформацию в точке; T_1 — единичный тензор, определяемый матрицей (1.18), а девиатор деформаций

$$D_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Последний характеризует изменение формы тела в окрестности рассматриваемой точки, так как объемная деформация, равная сумме компонентов главной диагонали девиатора деформации, отсутствует:

$$\theta(D_{\varepsilon}) = (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + (\varepsilon_y - \varepsilon_0) + (\varepsilon_z - \varepsilon_0) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon_0 = 0.$$

Разложение (2.12) является не только формальной операцией. Оно имеет физический смысл, как это уже было отмечено при разложении тензора напряжений.

Аналогично главным напряжениям можно найти *главные деформации*, т. е. такие деформации, в плоскости которых отсутствуют сдвиги. Для их определения получаем кубическое уравнение, три корня которого $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ равны главным деформациям. Коэффициенты кубического уравнения представляют собой *инварианты деформированного состояния*:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ E_2 &= -\varepsilon_x \varepsilon_y - \varepsilon_y \varepsilon_z - \varepsilon_z \varepsilon_x + 1/4 \gamma_{xy}^2 + 1/4 \gamma_{yz}^2 + 1/4 \gamma_{zx}^2 = \\ &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1; \\ E_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 1/4 \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - 1/4 \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - 1/4 \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \\ &= -1/4 \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Таким образом, объемная деформация (2.6) является инвариантом по отношению к выбору системы координат.

Направления трех главных деформаций взаимно перпендикулярны и называются *главными осями деформаций*. Они обладают тем свойством, что по их направлению возникает только растяжение или сжатие, а сдвиги отсутствуют.

Аналогично интенсивности касательных напряжений (1.22) в теории деформаций используется инвариантная величина

$$\gamma_i = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (2.16)$$

называемая *интенсивностью деформации сдвига* и представляющая собой удвоенный угол сдвига в плоскости октаэдрической площадки.

Интенсивности напряжений (1.23) в теории деформаций соответствует *интенсивность деформации*:

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (2.17)$$

Аналогично направляющему тензору напряжений введем понятие *направляющего тензора деформаций*, под которым будем подразумевать девиатор деформаций, каждый компонент которого разделен на половину интенсивности деформаций сдвига:

$$\bar{D}_\epsilon = 2D_\epsilon / \gamma_i = \left\{ \begin{array}{ccc} 2(\epsilon_x - \epsilon_0) / \gamma_i & \gamma_{xy} / \gamma_i & \gamma_{xz} / \gamma_i \\ \gamma_{yx} / \gamma_i & 2(\epsilon_y - \epsilon_0) / \gamma_i & \gamma_{yz} / \gamma_i \\ \gamma_{zx} / \gamma_i & \gamma_{zy} / \gamma_i & 2(\epsilon_z - \epsilon_0) / \gamma_i \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

Так же как и направляющий тензор напряжений, направляющий тензор деформаций определяет только главные направления деформаций и соотношения между компонентами тензора деформаций, но не определяет их значения.

ГЛАВА III

ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

§ 1. Выражение деформаций через напряжения

Для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформаций необходимо установить зависимости между напряжениями и деформациями. Эти зависимости носят физический характер. Действительно, рассматривая изучаемые в курсе сопротивления материалов диаграммы растяжения различных материалов, заключаем, что зависимости напряжение — деформации определяются физическими свойствами материалов.

Ограничиваясь малыми деформациями упругого тела, связь между напряжениями и деформациями можно принять линейной. При этом

в общем случае анизотропии каждая составляющая напряжения может зависеть от всех составляющих деформации:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11} \varepsilon_x + a_{12} \varepsilon_y + a_{13} \varepsilon_z + a_{14} \gamma_{xy} + a_{15} \gamma_{yz} + a_{16} \gamma_{zx}; \\ \sigma_y &= a_{21} \varepsilon_x + a_{22} \varepsilon_y + a_{23} \varepsilon_z + a_{24} \gamma_{xy} + a_{25} \gamma_{yz} + a_{26} \gamma_{zx}; \\ \sigma_z &= a_{31} \varepsilon_x + a_{32} \varepsilon_y + a_{33} \varepsilon_z + a_{34} \gamma_{xy} + a_{35} \gamma_{yz} + a_{36} \gamma_{zx}; \\ \tau_{xy} &= a_{41} \varepsilon_x + a_{42} \varepsilon_y + a_{43} \varepsilon_z + a_{44} \gamma_{xy} + a_{45} \gamma_{yz} + a_{46} \gamma_{zx}; \\ \tau_{yz} &= a_{51} \varepsilon_x + a_{52} \varepsilon_y + a_{53} \varepsilon_z + a_{54} \gamma_{xy} + a_{55} \gamma_{yz} + a_{56} \gamma_{zx}; \\ \tau_{zx} &= a_{61} \varepsilon_x + a_{62} \varepsilon_y + a_{63} \varepsilon_z + a_{64} \gamma_{xy} + a_{65} \gamma_{yz} + a_{66} \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

Коэффициенты a_{mn} называются *упругими постоянными*, и в общем случае их оказывается 36. Рассматривая только обратимые процессы деформирования, т. е. такие, при которых после снятия нагрузок форма и размеры тела полностью восстанавливаются, можно убедиться, что между коэффициентами a_{mn} существует следующая зависимость: $a_{mn} = a_{nm}$.

Следовательно, коэффициенты, рассматриваемые симметрично относительно главной диагонали, попарно равны между собой ($a_{12} = a_{21}$; $a_{13} = a_{31}$ и т. д.). Тогда в анизотропном теле количество упругих постоянных снижается до 21.

В случае изотропного тела уравнения (а) не должны изменяться при любых преобразованиях координат. Преобразуя координаты путем поворота осей на 180° , можно установить, что нормальные напряжения не связаны с угловыми деформациями, а касательные — с линейными (количество упругих постоянных снижается до 12). Кроме того, касательные напряжения не связаны с угловыми деформациями в других плоскостях, что уменьшает общее количество независимых постоянных до 9. После поворотов осей на 90° и на произвольный угол число независимых упругих постоянных сокращается до двух, в качестве которых можно принять постоянные, известные из курса сопротивления материалов.

При испытании стержня на растяжение установлена пропорциональность между нормальным напряжением и линейной деформацией в одном направлении

$$\varepsilon = \sigma/E, \quad (\text{б})$$

называемая *законом Гука*. Входящая сюда упругая постоянная E называется *модулем продольной упругости*. Также экспериментально установлен закон, связывающий линейные деформации в продольном и поперечном направлениях:

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon. \quad (\text{в})$$

Входящая сюда вторая упругая постоянная ν называется *коэффициентом Пуассона*.

При испытании на чистый сдвиг установлена пропорциональность между касательным напряжением и угловой деформацией в плоскости действия этого напряжения:

$$\gamma = \tau/G. \quad (\text{г})$$

Здесь появляется уже третья упругая постоянная G , называемая *модулем сдвига*. Однако модуль сдвига не является новой независимой упругой постоянной, так как он связан с первыми двумя известной из курса сопротивления материалов зависимостью

$$G = E / [2(1 + \nu)]. \quad (3.1)$$

Чтобы установить зависимости между составляющими деформации и напряжений при объемном напряженном состоянии, выделим из тела бесконечно малый параллелепипед (см. рис. 7) и рассмотрим действие только нормальных напряжений σ_x , σ_y , σ_z . Разницей между напряжениями на противоположных гранях можно пренебречь, так как она дает деформации более высокого порядка малости.

Определим удлинение ребра ab , параллельного напряжению σ_x . При действии этого напряжения согласно закону Гука (б) возникнет относительное удлинение ребра

$$\varepsilon'_x = \sigma_x / E.$$

Напряжение σ_y вызовет аналогичное удлинение в направлении, перпендикулярном ребру ab ,

$$\varepsilon_y = \sigma_y / E,$$

а в направлении самого ребра — укорочение, которое согласно формуле (в) составляет

$$\varepsilon''_x = -\nu \varepsilon_y,$$

или с учетом выражения деформации

$$\varepsilon''_x = -\nu \sigma_y / E.$$

Аналогично можно найти относительное укорочение ребра ab при действии напряжения σ_z :

$$\varepsilon'''_x = -\nu \sigma_z / E.$$

На основании принципа независимости действия сил находим полное относительное удлинение ребра ab как сумму удлинений при действии каждого напряжения:

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x = \sigma_x / E - \nu \sigma_y / E - \nu \sigma_z / E,$$

или, вынося за скобки E и ν ,

$$\varepsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] / E.$$

Аналогично можно найти линейные деформации по направлениям осей y и z :

$$\varepsilon_y = [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] / E, \quad \varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] / E.$$

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями, согласно закону Гука при сдвиге (г), можно представить независимо для каждой из трех плоскостей, параллельных координатным плоскостям:

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} / G; \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} / G.$$

Таким образом, имеем шесть формул:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E, & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G; \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]/E, & \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G; \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E, & \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G; \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Они выражают линейную зависимость между составляющими деформации и напряжений в изотропном упругом теле и называются *обобщенным законом Гука*.

§ 2. Выражение напряжений через деформации

При решении задач часто бывает необходимо иметь выражения составляющих напряжений через составляющие деформации.

Выведем предварительно соотношения для объемной деформации. Складывая почленно первые три формулы обобщенного закона Гука (3.2), находим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/E. \quad (a)$$

Так как на основании выражений (2.6) и (1.12)

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta, \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = S_1,$$

то формулу (a) можно представить в виде

$$\theta = (1 - 2\nu)S_1/E, \quad (3.3)$$

т. е. относительная объемная деформация θ пропорциональна первому инварианту напряженного состояния S_1 . Введя модуль объемного расширения

$$K = E/[3(1 - 2\nu)], \quad (3.4)$$

получим

$$S_1 = 3K\theta. \quad (б)$$

Если согласно равенству

$$\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = S_1/3 \quad (3.5)$$

первый инвариант напряженного состояния S_1 заменить утроенным средним напряжением в точке, то вместо уравнения (б) получим

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (3.6)$$

Последнее соотношение гласит: среднее напряжение в точке пропорционально объемной деформации.

Для выражения составляющих напряжений через составляющие деформации воспользуемся первой формулой закона Гука (3.2), прибавляя и вычитая в квадратных скобках величину $\nu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E.$$

Выделяя первый инвариант напряженного состояния S_1 , согласно формуле (1.12) получим

$$\varepsilon_x = [(1 + \nu)\sigma_x - \nu S_1]/E. \quad (B)$$

Из формулы (3.3) имеем

$$S_1 = E\theta/(1 - 2\nu). \quad (Г)$$

Подставляя формулу (Г) в (B), получаем

$$\varepsilon_x = (1 + \nu)\sigma_x/E - \nu\theta/(1 - 2\nu),$$

откуда

$$\sigma_x = E\nu\theta/(1 + \nu)(1 - 2\nu) + E\varepsilon_x/(1 + \nu). \quad (Д)$$

Введем обозначения:

$$\lambda = E\nu/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]; \quad \mu = E/[2(1 + \nu)]. \quad (3.7)$$

Тогда вместо формулы (Д) получим

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x. \quad (е)$$

Упругие постоянные λ и μ называются *коэффициентами Ламе*. Они, так же как модули E и G , характеризуют упругие свойства материала. Из сравнения формул (3.1) и (3.7) следует, что $\mu = G$.

Аналогично формуле (е) можно записать еще две строки — для σ_y и σ_z . Присоединив к ним последние формулы (3.2), выраженные относительно напряжений, получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Эти формулы обычно называют обратной формой закона Гука. Складывая почленно первые три из них, находим

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\theta + 2\mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

или согласно выражениям (1.12) и (2.6)

$$S_1 = (3\lambda + 2\mu)\theta. \quad (3.9)$$

Это соотношение устанавливает связь между первыми инвариантами напряженного и деформированного состояний через коэффициенты Ламе. Заменяя опять первый инвариант напряженного состояния S_1 утроенным средним напряжением в точке σ_0 , а объемную деформацию θ — утроенной средней деформацией в точке, согласно равенству

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3 = \theta/3 \quad (3.10)$$

получаем еще одну форму закона Гука:

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0, \quad (3.11)$$

т. е. среднее напряжение в точке пропорционально среднему удлинению в этой точке.

§ 3. Закон Гука в тензорной форме

Закон Гука имеет наиболее простой и компактный вид, если его записать в тензорной форме. Для этого первую формулу закона Гука в форме (3.8) преобразуем следующим образом: вычтем из левой и правой его частей среднее напряжение σ_0 :

$$\sigma_x - \sigma_0 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x - \sigma_0.$$

Выразим в правой части θ и σ_0 через среднюю деформацию в точке на основании соотношений (3.10) и (3.11):

$$\sigma_x - \sigma_0 = 3\lambda\varepsilon_0 + 2\mu\varepsilon_x - (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0.$$

После упрощения с учетом того, что $\mu = G$,

$$\sigma_x - \sigma_0 = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0). \quad (a)$$

Аналогично можно получить еще два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0); \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0). \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Касательные напряжения из формул (3.8) представим в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= 2G \cdot 1/2 \gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} &= 2G \cdot 1/2 \gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} &= 2G \cdot 1/2 \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Левые части уравнений (а), (б) и (в) представлены компонентами девиатора напряжений, а правые — соответствующими компонентами девиатора деформаций, умноженными на один и тот же коэффициент $2G$. Следовательно, девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций:

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon. \quad (3.12)$$

Так как девиаторы напряжений и деформаций характеризуют только ту часть деформации, которая связана с изменением формы тела, к уравнению (3.12) следует добавить закон Гука для объемной деформации, например в виде соотношения (3.6).

Таким образом, обобщенный закон Гука выражается двумя равенствами: тензорным (3.12) и скалярным (3.6) с двумя упругими постоянными $2G$ и K . Зависимость (3.6) называется *законом изменения объема*, а зависимость (3.12) — *законом изменения формы*.

Уравнение (3.12) можно записать еще компактней, если использовать понятия направляющих тензоров напряжений и деформации. Разделив обе части уравнения на интенсивность касательных напряжений τ_i , найдем

$$D_\sigma/\tau_i = 2GD_\varepsilon/\tau_i. \quad (г)$$

Подставляя в формулу (2.16) значения составляющих деформации (3.2) и сравнивая полученный результат с формулой (1.22), устанавли-

ливаем связь между интенсивностью касательных напряжений и интенсивностью деформаций сдвига:

$$\tau_i = G\gamma_i.$$

Внося это соотношение в правую часть уравнения (г), после сравнения с формулами (1.26) и (2.18) получаем

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\varepsilon. \quad (3.13)$$

Таким образом, вместо зависимости (3.12) можно рассматривать равенство (3.13), которое гласит, что направляющие тензоры напряжений и деформации совпадают.

§ 4. Работа упругих сил. Потенциальная энергия деформаций

Выделим из тела бесконечно малый параллелепипед (см. рис. 7) и подсчитаем работу, совершаемую приложенными к нему упругими силами на возможных перемещениях.

Рассмотрим сначала работу, совершаемую нормальными силами, действующими на гранях, нормальных к оси Ox и соответствующих напряжениям σ_x и $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$. Если точкам тела сообщить какие-либо возможные перемещения, то расстояние между рассматриваемыми гранями изменится на некоторую величину $\delta \varepsilon_x dx$. Отбросив в выражении напряжения на правой грани величину $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ как бесконечно малую по сравнению с σ_x , найдем, что две равные и противоположно направленные силы $\sigma_x dydz$, приложенные к указанным граням параллелепипеда, произведут работу

$$\sigma_x dydz \delta \varepsilon_x dx = \sigma_x \delta \varepsilon_x dx dy dz.$$

Точно так же можно подсчитать возможную работу, совершаемую нормальными силами в направлении осей Oy и Oz на соответствующих им возможных перемещениях:

$$\sigma_y \delta \varepsilon_y dx dy dz, \quad \sigma_z \delta \varepsilon_z dx dy dz.$$

Касательные силы, параллельные оси Ox , на вертикальных гранях при отбрасывании бесконечно малых величин высшего порядка образуют пару сил с моментом $\tau_{xy} dz dx dy$. Для вычисления работы, совершаемой этой парой на возможных перемещениях, ее момент нужно умножить на приращение соответствующего угла сдвига $\delta \gamma_{xy}$:

$$\tau_{xy} dz dx dy \delta \gamma_{xy} = \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dx dy dz.$$

Таким же путем подсчитаем работу двух других касательных составляющих на соответствующих им возможных перемещениях:

$$\tau_{yz} \delta \gamma_{yz} dx dy dz, \quad \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} dx dy dz.$$

На основании принципа независимости действия сил возможную работу всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу, получим

как сумму возможных работ, совершаемых каждой силой в отдельности:

$$\delta(dA) = (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz.$$

Разделив это выражение на объем рассматриваемого параллелепипеда $dx dy dz$, получим приращение работы, отнесенной к единице объема тела в той точке, где выделен параллелепипед:

$$\delta A = \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}. \quad (a)$$

На основании закона сохранения энергии будем считать, что работа упругих сил полностью переходит в потенциальную энергию, накапливаемую телом при получении упругих деформаций и возвращаемую им обратно в виде работы сил при исчезновении деформации.

Если обозначить через W удельную потенциальную энергию, т. е. энергию, накапливаемую в единице объема деформируемого тела, то на основании принятого выше допущения приращение работы внутренних сил на возможных перемещениях полностью перейдет в потенциальную энергию и последняя получит приращение

$$\delta W = \delta A.$$

Сравнивая это соотношение с формулой (a), получаем приращение удельной потенциальной энергии в таком виде:

$$\delta W = \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}. \quad (3.14)$$

Приращение δW с точностью до величин второго порядка малости можно заменить полным дифференциалом:

$$dW = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}.$$

Подставляя сюда значения напряжений (3.8), получаем

$$dW = \lambda \theta d\theta + 2\mu (\epsilon_x d\epsilon_x + \epsilon_y d\epsilon_y + \epsilon_z d\epsilon_z) + \\ + \mu (\gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \gamma_{zx} d\gamma_{zx}).$$

Интегрируя, найдем выражение потенциальной энергии через деформации:

$$W = 1/2 [\lambda \theta^2 + 2\mu (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \mu (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.15)$$

Производя обратную операцию с формулами (3.8), получим

$$W = 1/2 (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.16)$$

Следовательно, удельная потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, равна полусумме произведений составляющих напряжений на соответствующие им составляющие деформации. Это соотношение называют *формулой Клапейрона*.

Удельную потенциальную энергию можно также выразить только через составляющие напряжений. Подставляя в формулу (3.16) значения деформаций (3.2), найдем

$$W = [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \\ + 2(1 + \nu) (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] / (2E). \quad (3.17)$$

Согласно соотношениям (3.7), упругие постоянные λ и μ , входящие в формулу (3.15), положительные, следовательно, потенциальная энергия также всегда является величиной положительной.

Потенциальную энергию, накапливаемую во всем теле, подсчитывают суммированием удельной потенциальной энергии по всему объему тела V :

$$U = \int \int \int_V W dx dy dz. \quad (3.18)$$

Подставляя сюда выражение удельной потенциальной энергии по формуле Клапейрона (3.16), окончательно получаем

$$U = 1/2 \int \int \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.19)$$

ГЛАВА IV

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Основные уравнения теории упругости и способы их решения

В предыдущих главах получены три группы формул, которые образуют основные уравнения теории упругости.

1. Статические уравнения. В эту группу входят дифференциальные уравнения равновесия (1.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

и условия на поверхности (1.4):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

2. Геометрические уравнения. В эту группу входят геометрические соотношения Коши (2.3):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

и уравнения неразрывности деформаций (2.8):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

3. Физические уравнения. В эту группу входят формулы закона Гука либо в прямой форме (3.2):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E, & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G; \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]/E, & \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G; \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E, & \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

либо в обратной форме (3.8):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Имея эти зависимости, можно приступить непосредственно к решению задачи теории упругости о напряжениях и деформациях, возникающих в упругом изотропном теле под действием внешних сил.

Перечисленные уравнения содержат 15 неизвестных функций: шесть составляющих напряжений

$$\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z);$$

шесть составляющих деформаций

$$\varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \varepsilon_z(x, y, z), \gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{zx}(x, y, z)$$

и три составляющие перемещения

$$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z).$$

Для отыскания этих функций располагаем 15 уравнениями: тремя дифференциальными уравнениями равновесия (4.1), шестью геометрическими соотношениями Коши (4.3) и шестью формулами закона Гука (4.5) или (4.6). Таким образом, с математической точки зрения задача

может быть решена и сводится к интегрированию указанных 15 уравнений при удовлетворении условий на поверхности (4.2).

Решение уравнений можно вести различными способами в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные.

1. *Решение в перемещениях*, когда за неизвестные приняты три составляющих перемещения: $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$.

2. *Решение в напряжениях*, когда за неизвестные приняты шесть составляющих напряжений: $\sigma_x(x, y, z)$, $\sigma_y(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$, $\tau_{zx}(x, y, z)$.

3. *Решение в смешанной форме*, когда за неизвестные приняты некоторые составляющие перемещений и некоторые составляющие напряжений.

§ 2. Решение задачи теории упругости в перемещениях

Для отыскания неизвестных трех составляющих перемещения $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ необходимо иметь три уравнения, которые можно получить из дифференциальных уравнений равновесия (4.1), выразив в них напряжения через перемещения. Воспользуемся первым уравнением (4.1) и подставим в него напряжения из формул закона Гука (4.6). В результате получим

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Затем в записанное уравнение подставим значения деформаций (4.3). После группировки слагаемых находим

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0. \quad (a)$$

Выражение в первых скобках можно обозначить сокращенно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u. \quad (4.7)$$

Этот дифференциальный оператор называется оператором Лапласа над функцией $u(x, y, z)$ и читается «набла два u ».

Выражение, стоящее во вторых скобках, можно упростить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

После указанных сокращений и упрощений уравнение (a) принимает вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0.$$

Аналогично преобразуем и два других дифференциальных уравнения равновесия (4.1). Таким образом, получаем систему уравнений для решения задачи теории упругости в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y &= 0; \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Ламе*. Они объединяют статические, геометрические и физические предпосылки теории упругости, рассмотренные в предыдущих главах. Действительно, в них содержатся условия равновесия каждого элемента тела, геометрические характеристики деформации u , v , w , θ и физические характеристики материала λ и μ .

Так же как уравнения равновесия, преобразуем условия на поверхности. Для этого в первое уравнение (4.2) подставим выражения напряжений через деформации (4.6):

$$X_v = (\lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x)l + \mu \gamma_{xy}m + \mu \gamma_{xz}n.$$

Подставим сюда значения деформаций (4.3) и сгруппируем все члены следующим образом:

$$\begin{aligned} X_v = \lambda \theta l + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + \\ + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение в первых скобках представляет собой производную функции $u(x, y, z)$ по направлению нормали v к поверхности тела. Действительно, вычисляя частную производную сложной функции $u(x, y, z)$ по переменной v , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dv} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dv}.$$

Производные координат по v представляют собой соответствующие направляющие косинусы нормали v :

$$\frac{dx}{dv} = l; \quad \frac{dy}{dv} = m; \quad \frac{dz}{dv} = n.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n$$

и уравнение (6) принимает вид

$$X_v = \lambda \theta l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right). \quad (B)$$

Точно так же можно преобразовать два других уравнения (4.2). В результате приходим к следующим трем условиям на поверхности, выраженным через перемещения:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \lambda\theta l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right); \\ Y_v &= \lambda\theta m + \mu \frac{\partial v}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right); \\ Z_v &= \lambda\theta n + \mu \frac{\partial w}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Теперь можно составить план непосредственного решения задачи теории упругости в перемещениях. Для отыскания трех составляющих перемещения u , v и w необходимо проинтегрировать три уравнения Ламе (4.8) и удовлетворить условиям на поверхности (4.9). По найденным перемещениям из геометрических соотношений Коши (4.3) определяют составляющие деформации, а затем из формул закона Гука (4.6) — составляющие напряжений.

§ 3. Решение задачи теории упругости в напряжениях при постоянстве объемных сил

В дальнейшем круг рассматриваемых задач ограничим случаями, когда объемные силы постоянны по всему объему тела или равны нулю. Это ограничение позволяет значительно упростить некоторые уравнения при решении задач в напряжениях, так как все производные от составляющих объемных сил по координатам x , y , z обращаются в нуль.

Рассмотрим свойства функций θ и S_1 при постоянстве объемных сил. Продифференцировав первое уравнение Ламе (4.8) по x , второе — по y , третье — по z и почленно сложив, получим

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w \right) = 0. \quad (a)$$

Выражение, стоящее в первых скобках, представляет собой оператор Лапласа над функцией θ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \nabla^2 \theta.$$

Выражение во вторых скобках можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w = \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \nabla^2 \theta.$$

Тогда вместо уравнения (a) получим

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta = 0,$$

или

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (4.10)$$

Функция, подчиняющаяся уравнению (4.10), называется *гармонической*. Следовательно, при постоянстве объемных сил объемная деформация θ есть гармоническая функция.

Подставляя в уравнение (4.10) выражение объемной деформации (3.3) и деля на постоянный множитель, получаем

$$\nabla^2 S_1 = 0, \quad (4.11)$$

т. е. при постоянстве объемных сил первый инвариант напряженного состояния тоже есть функция гармоническая.

При решении задачи теории упругости в напряжениях за основные неизвестные принимают, как указывалось в § 1 настоящей главы, шесть составляющих напряжений: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} . Для их отыскания трех уравнений равновесия (4.1) недостаточно и поэтому нужно добавить еще шесть уравнений неразрывности деформаций (4.4). В последние входят составляющие деформации, которые необходимо предварительно выразить через напряжения. Подставляя в первое уравнение (4.4) выражения деформаций (4.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) - \\ - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для практического применения уравнение (6) следует преобразовать, исключив из него касательное напряжение τ_{xy} . Для этого продифференцируем первое уравнение равновесия (4.1) по x , второе — по y , третье — по z . Складывая почленно два первых из полученных уравнений и вычитая третье, находим

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}. \quad (в)$$

Подставляя соотношение (в) в уравнение (6), получаем

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \nu \nabla^2 \sigma_z = 0.$$

Прибавим и вычтем в этом уравнении $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}$, $\nabla^2 \sigma_z$. Тогда с учетом уравнения (4.11)

$$(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0.$$

Аналогично можно преобразовать остальные уравнения неразрывности деформаций (4.4). В результате получим шесть уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} = 0, \quad (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial y} = 0; \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} = 0, \quad (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y \partial z} = 0; \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0, \quad (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z \partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Эти уравнения получены в 1892 г. итальянским математиком Е. Бельтрами. В 1899 г. австралиец Дж. Мичелл вывел аналогичные уравнения для общего случая, когда объемные силы не постоянны и, следовательно, в правую часть уравнений вместо нулей входят члены, содержащие производные от объемных сил. Поэтому часто уравнения (4.12) называют уравнениями Бельтрами—Мичелла.

Таким образом, для решения задачи теории упругости в напряжениях приходится интегрировать девять уравнений (4.1) и (4.12). Наличие трех лишних уравнений необходимо для получения однозначного решения, что обсуждалось при выводе уравнений неразрывности деформаций (2.8), следствием которых являются уравнения Бельтрами—Мичелла.

Полученные после интегрирования шесть составляющих напряжений должны удовлетворять условиям на поверхности (4.2). После этого по формулам закона Гука (4.5) определяют составляющие деформаций, а из геометрических соотношений Коши (4.3)— составляющие перемещений.

§ 4. Типы граничных условий на поверхности тела

Из предыдущего видно, что решение задачи теории упругости любым способом сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих поведение упругого тела во внутренних точках. К этим уравнениям добавляются условия на поверхности, ограничивающей тело. Эти условия диктуют задание или внешних поверхностных сил, или перемещений точек поверхности тела. В зависимости от этого обычно формулируют один из трех типов краевых задач.

Первая краевая задача — кинематическая. В объеме тела отыскиваются составляющие перемещений, принимающие на поверхности определенные значения. В условии на поверхности тела таким образом задаются уравнение поверхности и значения составляющих перемещений на этой поверхности.

Вторая краевая задача — статическая. В этом случае на поверхности тела не наложены никакие ограничения на перемещения и задаются уравнение поверхности, направляющие косинусы нормали к поверхности и значения составляющих поверхностных нагрузок. Эти данные вносятся в уравнения (4.2).

В случае, когда поверхность тела совпадает с координатными плоскостями, краевые условия могут быть сформулированы непосредственно в напряжениях. Тогда достаточно указать уравнение поверхности и задать значения составляющих напряжений на этой поверхности.

Третья краевая задача — смешанная. В этом случае на одной части поверхности тела задаются кинематические условия, а на другой — статические.

Этими тремя задачами не исчерпывается, однако, все разнообразие краевых условий. Например, на некотором участке поверхности могут быть заданы не все три составляющие перемещения или составляющие поверхностной нагрузки.

§ 5. Теорема единственности. Методы решения задачи теории упругости

При решении задач теории упругости может возникнуть вопрос о том, является ли полученное решение однозначным, т. е. соответствует ли заданным объемным и поверхностным силам одна система напряжений или их несколько.

Докажем следующую теорему. Для тела, находящегося в естественном состоянии, решение задачи теории упругости единственно, если справедлив принцип независимости действия сил.

Предположим обратное: под действием заданных поверхностных X_v, Y_v, Z_v и объемных X, Y, Z сил возможно возникновение двух различных совокупностей напряжений:

$$\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}$$

и

$$\sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z, \tau''_{xy}, \tau''_{yz}, \tau''_{zx}$$

Обе совокупности должны удовлетворять уравнениям равновесия (4.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (a')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma''_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau''_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau''_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma''_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a'')$$

и условиям на поверхности (4.2):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma'_x l + \tau'_{xy} m + \tau'_{xz} n; \\ Y_v &= \tau'_{yx} l + \sigma'_y m + \tau'_{yz} n; \\ Z_v &= \tau'_{zx} l + \tau'_{zy} m + \sigma'_z n; \end{aligned} \right\} \quad (б')$$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma''_x l + \tau''_{xy} m + \tau''_{xz} n; \\ Y_v &= \tau''_{yx} l + \sigma''_y m + \tau''_{yz} n; \\ Z_v &= \tau''_{zx} l + \tau''_{zy} m + \sigma''_z n. \end{aligned} \right\} \quad (б'')$$

Вычтя почленно соответствующие уравнения систем (а) и (б), получим новую систему уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma'_x - \sigma''_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau'_{xy} - \tau''_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau'_{xz} - \tau''_{xz}) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} (\tau'_{yx} - \tau''_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma'_y - \sigma''_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau'_{yz} - \tau''_{yz}) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} (\tau'_{zx} - \tau''_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau'_{zy} - \tau''_{zy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma'_z - \sigma''_z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

и условий на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (\sigma'_x - \sigma''_x) l + (\tau'_{xy} - \tau''_{xy}) m + (\tau'_{xz} - \tau''_{xz}) n; \\ 0 &= (\tau'_{yx} - \tau''_{yx}) l + (\sigma'_y - \sigma''_y) m + (\tau'_{yz} - \tau''_{yz}) n; \\ 0 &= (\tau'_{zx} - \tau''_{zx}) l + (\tau'_{zy} - \tau''_{zy}) m + (\sigma'_z - \sigma''_z) n. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

На основании принципа независимости действия сил разности напряжений, входящие в эти системы уравнений, можно принять за новую совокупность напряжений, которая согласно уравнениям (в) и (г) возникает при отсутствии объемных и поверхностных сил. Но для тела, находящегося в естественном состоянии, эти напряжения должны быть равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma'_x - \sigma''_x = 0, \quad \sigma'_y - \sigma''_y = 0, \quad \sigma'_z - \sigma''_z = 0; \\ \tau'_{xy} - \tau''_{xy} = 0, \quad \tau'_{xz} - \tau''_{xz} = 0, \quad \tau'_{yz} - \tau''_{yz} = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \sigma'_x = \sigma''_x, \quad \sigma'_y = \sigma''_y, \quad \sigma'_z = \sigma''_z; \\ \tau'_{xy} = \tau''_{xy}, \quad \tau'_{yz} = \tau''_{yz}, \quad \tau'_{zx} = \tau''_{zx}. \end{aligned}$$

Следовательно, обе совокупности напряжений совпадают и решение задачи теории упругости, когда заданы объемные и поверхностные силы, единственно. Точно так же можно доказать единственность решения задачи теории упругости и в случае, когда на поверхности упругого тела заданы перемещения.

Из доказанной теоремы следует: так как решение задач теории упругости единственно, то безразлично, каким математическим методом она решена. Можно указать три основных метода математического решения задачи теории упругости:

1. **Прямой метод.** Он заключается в непосредственном интегрировании уравнений теории упругости совместно с заданными условиями на поверхности.

2. **Обратный метод.** В этом случае задаются функциями перемещений или напряжений, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям, и определяют, каким внешним нагрузкам соответствует рассматриваемая система перемещений или напряжений.

3. **Полуобратный метод Сен-Венана.** Он состоит в задании части функций напряжений или перемещений. Затем с помощью уравнений теории упругости устанавливаются зависимости,

которым должны удовлетворять оставшиеся функции напряжений и перемещений. При этом дифференциальные уравнения настолько упрощаются, что решение их не представляет особых трудностей. Полуобратный метод является одним из наиболее эффективных методов решения задачи теории упругости.

ГЛАВА V ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Чистый изгиб прямого призматического бруса

Простейшими называются задачи теории упругости, в которых напряжения являются линейными функциями координат или постоянны по всему объему тела. При этом уравнения неразрывности деформаций удовлетворяются тождественно, так как в них входят вторые производные от напряжений.

Схема прямого призматического бруса изображена на рис. 12. Ось z направлена вдоль оси бруса, а оси x и y являются главными центральными осями инерции сечения. Пары сил с моментом M_0 приложены к торцам бруса в главной плоскости xOz .

Задачу будем решать обратным методом в напряжениях. Из курса сопротивления материалов известно, что в случае чистого изгиба в поперечном сечении бруса возникает напряженное состояние со следующими составляющими:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= M_0 x / J_y; \\ \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0, \end{aligned} \right\} (5.1)$$

где x — расстояние рассматриваемой точки поперечного сечения до нейтральной оси y ; J_y — момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Проверим, возможно ли существование такого напряженного состояния с точки зрения теории упругости и соответствует ли оно чистому изгибу. Подставив значения напряжений (5.1) в дифференциальные уравнения равновесия (4.1), получим

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

т. е. условия равновесия удовлетворяются при отсутствии объемных сил или в случае, когда они настолько малы, что их можно не принимать во внимание.

Уравнение неразрывности деформаций (4.12) проверять не нужно, так как задача относится к простейшим (напряжения зависят от координат линейно).

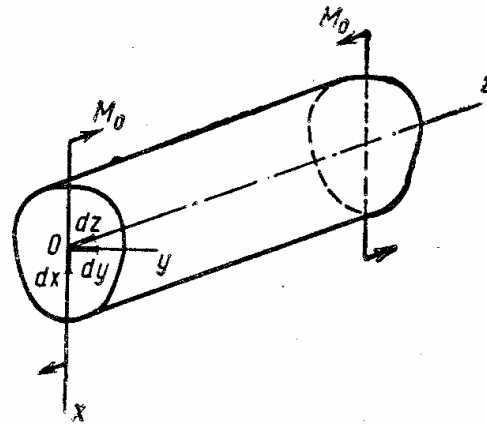


Рис. 12

Переходим к условиям на поверхности (4.2). После подстановки в них нулевых значений напряжений (5.1) получаем:

$$X_v = 0, Y_v = 0, Z_v = \sigma_z n. \quad (a)$$

Рассмотрим граничные условия на боковой поверхности бруса. Так как нормаль к ней во всех точках перпендикулярна оси z , направляющий косинус $n = 0$. Тогда из условий (a) находим, что $X_v = Y_v = Z_v = 0$, т. е. боковая поверхность бруса свободна от напряжений.

На правом торце направляющий косинус $n = 1$, так как нормаль к нему параллельна оси z . После подстановки в условия (a) значений косинуса и напряжения σ_z из формул (5.1) получаем составляющие поверхностной нагрузки на правом торце:

$$X_v = 0, Y_v = 0, Z_v = M_0 x / J_y.$$

Убедимся, что эти составляющие сводятся к паре с моментом M_0 , для чего найдем их равнодействующие.

Проекция торцовых нагрузок на оси x и y тождественно равна нулю, а проекция на ось z дает нормальную силу

$$N = \int_F Z_v dF = \frac{M_0}{J_y} \int_F x dF = 0,$$

так как последний интеграл представляет собой статический момент площади торцового сечения относительно центральной оси y и, следовательно, равен нулю.

Момент нагрузок на торце относительно оси z тождественно равен нулю. Подсчитаем момент этих нагрузок относительно оси x :

$$M_x = \int_F Z_v dF \cdot y = \frac{M_0}{J_y} \int_F x y dF.$$

Последний интеграл, представляющий собой центробежный момент инерции площади торцового сечения относительно главных осей x и y , равен нулю и, следовательно, $M_x = 0$.

Момент нагрузок на торце относительно оси y

$$M_y = \int_F Z_v dF \cdot x = \frac{M_0}{J_y} \int_F x^2 dF.$$

Поскольку последний интеграл представляет собой момент инерции площади торцового сечения относительно оси y , то $M_y = M_0$. Следовательно, нагрузки на правом торце приводятся к паре сил с моментом M_0 в плоскости xOz . Такой же вывод можно получить, рассматривая условия на левом торце.

Таким образом, напряжения (5.1) удовлетворяют основным уравнениям теории упругости. Следовательно, их существование возможно и они соответствуют чистому изгибу. При этом пары сил на торцах должны быть распределены по тому же закону, что и напряжения σ_z . Если же приложение этих пар будет иным, то и распределение напряжений σ_z не будет следовать закону (5.1). Оно окажется более сложным

и переменным по длине бруса. Однако на основании принципа Сен-Венана при любом законе распределения момента M_0 , приложенного к торцу бруса, напряжения σ_z будут отличаться от закона (5.1) только в непосредственной близости от торца, по всей же остальной длине бруса закон распределения напряжений будет практически соответствовать формулам (5.1).

Для полного решения задачи определим деформации и перемещения. Подставим значения напряжений (5.1) в формулы закона Гука (4.5). В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu M_0 x / (FJ_y) = -\nu x / \rho; \\ \varepsilon_z = M_0 x / (EJ_y) = x / \rho; \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Здесь для сокращения записи использована известная из курса сопротивления материалов связь между изгибающим моментом и кривизной изогнутой оси бруса при чистом изгибе:

$$M_0 / (EJ_y) = 1/\rho,$$

где ρ — радиус кривизны.

Для определения составляющих перемещений подставим выражения деформаций (5.2) в формулы (4.3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu}{\rho} x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu}{\rho} x, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho} x, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Интегрируя три первых уравнения (6), находим:

$$u = -\frac{\nu}{2\rho} x^2 + f(y, z); \quad v = -\frac{\nu}{\rho} xy + \varphi(z, x); \quad w = \frac{1}{\rho} zx + \psi(x, y), \quad (в)$$

где $f(y, z)$, $\varphi(z, x)$ и $\psi(x, y)$ — произвольные функции.

Функции (в) должны удовлетворять трем остальным уравнениям (6), поэтому, подставляя эти функции в указанные уравнения, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\nu}{\rho} y; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} z. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Для разделения входящих сюда функций продифференцируем последовательно эти три уравнения по координатам x, y, z . В результате получим следующие девять уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho}; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{v}{\rho}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

Из трех последних уравнений сложением и вычитанием находим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0. \quad (е)$$

Анализируя производные (д) и (е), устанавливаем, что функции φ и ψ должны быть линейными, а функция f — квадратичной:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z, x) &= a_1 x + a_2 z + a_3; \\ \psi(x, y) &= a_4 x + a_5 y + a_6; \\ f(y, z) &= -(z^2 - v y^2)/(2\rho) + a_7 y + a_8 z + a_9, \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

где a_i — произвольные постоянные. Часть из них связана между собой. После подстановки функций (ж) в уравнения (г) находим:

$$a_7 = -a_1, \quad a_5 = -a_2, \quad a_8 = -a_4.$$

Учитывая эти равенства и внося функции (ж) в соотношения (в), получаем

$$\left. \begin{aligned} u &= -[z^2 + v(x^2 - y^2)]/(2\rho) - a_1 y - a_4 z + a_9; \\ v &= -vxy/\rho + a_1 x + a_2 z + a_3; \\ \omega &= zx/\rho + a_4 x - a_2 y + a_6. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Остальные шесть произвольных постоянных определяются из условий закрепления бруса.

Рассмотрим случай, когда брус жестко зашпемлен в начале координат. Это значит, что в указанной точке осуществлено такое закрепление, при котором невозможны поступательные перемещения вдоль координатных осей и невозможен поворот вокруг этих осей. Математические условия отсутствия поступательных перемещений точки в начале координат сводятся к следующим:

$$\text{при } x = y = z = 0 \quad u = v = \omega = 0.$$

Для закрепления бруса от вращения вокруг начала координат необходимо, чтобы любые два из трех элементов dx , dy и dz (см. рис. 12) у начала координат оставались неподвижными. Угол поворота отрезка dz относительно оси y в плоскости xOz согласно соотношению (2.2) равен du/dz . Аналогично, угол поворота отрезка dz относительно оси x в плоскости yOz равен dv/dz , а угол поворота отрезка dy относительно оси z в плоскости xOy — dw/dy . Закрепляя стержень от указанных поворотов, получаем еще три условия:

$$\text{при } x = y = z = 0, \quad du/dz = dv/dz = dw/dy = 0. \quad (\text{и})$$

Из условий закрепления (з) и (и) находим

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0.$$

После этого составляющие перемещений (5.3) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u &= -[z^2 + v(x^2 - y^2)]/(2\rho); \\ v &= -vxy/\rho; \\ w &= zx/\rho. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Таким образом, задача о чистом изгибе прямого призматического бруса произвольного поперечного сечения полностью решена. Формулы (5.1) позволяют подсчитать напряжения, формулы (5.2) — деформации, а формулы (5.4) — перемещения в любой точке бруса.

Исследуем форму продольной оси бруса в случае чистого изгиба. При $x = y = 0$ из формул (5.4) получаем уравнение изогнутой оси бруса

$$u = -z^2/(2\rho).$$

Следовательно, после деформирования ось бруса искривляется по квадратной параболе в плоскости действия изгибающего момента, т. е. имеет место плоский изгиб. Тангенс угла наклона касательной к оси бруса в произвольном сечении $z = z_0$

$$\text{tg } \alpha = du/dz |_{z=z_0} = -z_0/\rho.$$

Исследуем характер деформирования поперечного сечения $z = z_0$. Уравнение поверхности этого сечения после деформирования имеет вид

$$z = z_0 + w |_{z=z_0}.$$

Подставляя сюда значение составляющей перемещения w из формул (5.4), получаем

$$z = z_0 (1 + x/\rho). \quad (\text{к})$$

Это уравнение плоскости, параллельной оси y . Таким образом, плоское поперечное сечение бруса остается плоским и после деформирования. Тангенс угла наклона β плоскости поперечного сечения после деформирования получим дифференцированием уравнения (к) по координате z :

$$\text{tg } \beta = dx/dz = \rho/z_0.$$

Перемножая тангенсы, находим

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -1.$$

Полученное уравнение представляет собой условие перпендикулярности прямой и плоскости. Следовательно, поперечное сечение при чистом изгибе остается после деформирования не только плоским, но и нормальным к оси бруса. Гипотеза плоских сечений, вводимая в сопротивлении материалов, в этом случае оправдывается полностью.

Исследуем форму контура поперечного сечения после деформирования, если до этого он имел очертания прямоугольника $ABCD$ (рис. 13).

Уравнение боковых сторон AD и BC после деформирования

$$y = \pm b/2 + v \Big|_{\substack{z=z_0 \\ y=\pm b/2}}$$

После подстановки сюда функции v из формул (5.4) получаем уравнение прямых $A'D'$ и $B'C'$, повернутых относительно точек N и M с координатами $x = 0$, $y = \pm b/2$:

$$y = \pm b (1 - vx/\rho)/2.$$

Переходим к рассмотрению верхней и нижней сторон сечения. После деформирования их уравнение

$$x = \pm h/2 + u \Big|_{\substack{z=z_0 \\ x=\pm h/2}}$$

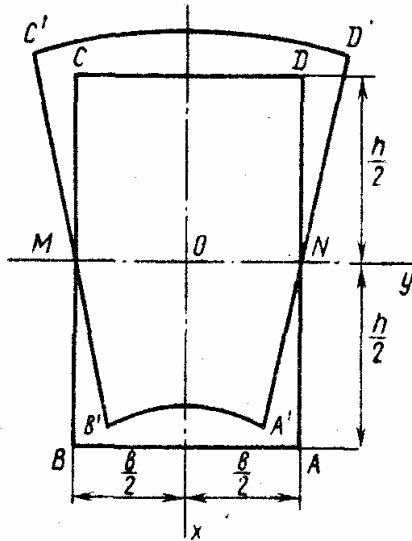


Рис. 13

Подставляя сюда значение функции u из формул (5.4), находим

$$x = \pm h/2 - [z_0^2 + v (h^2/4 - y^2)] / (2\rho).$$

Это уравнение парабол $A'B'$ и $C'D'$, изображенных на рис. 13. Верхняя часть сечения соответствует сжатым продольным волокнам, нижняя — растянутым.

§ 2. Кручение круглого бруса постоянного сечения

Круглый брус, подверженный кручению моментом M_0 , изображен на рис. 14. Будем искать решение задачи в перемещениях обратным методом. Следуя Сен-Венану, зададим перемещения точек бруса следующим образом. Перемещение точки A в плоскости поперечного сечения (рис. 15) определяется только поворотом этого сечения на угол $\varphi'z$ относительно сечения, находящегося на расстоянии z от рассматриваемого. Это перемещение равно $AA' = \varphi'z\rho$. Здесь $\varphi' = d\varphi/dz$ — угол закручивания, приходящийся на единицу длины; ρ — радиус-вектор точки. Перемещение вдоль оси z отсутствует, т. е. $w = 0$.

Раскладывая перемещение AA' по осям x и y , находим: $u = -AA' \sin \alpha$, $v = AA' \cos \alpha$, или с учетом того, что $\rho \cos \alpha = x$ и

$\rho \sin \alpha = y$, получаем следующие составляющие перемещений точек бруса при кручении:

$$u = -\varphi'zy, \quad v = \varphi'zx, \quad w = 0. \quad (a)$$

Перемещения (а) должны удовлетворять уравнениям Ламе (4.8). Так как в эти уравнения входят вторые производные от перемещений, то они в случае отсутствия объемных сил обращаются в тождества. Остается удовлетворить условиям на поверхности, для чего найдем деформации и напряжения.

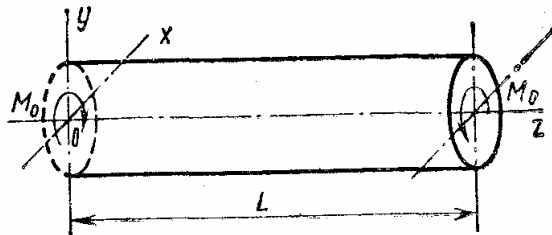


Рис. 14

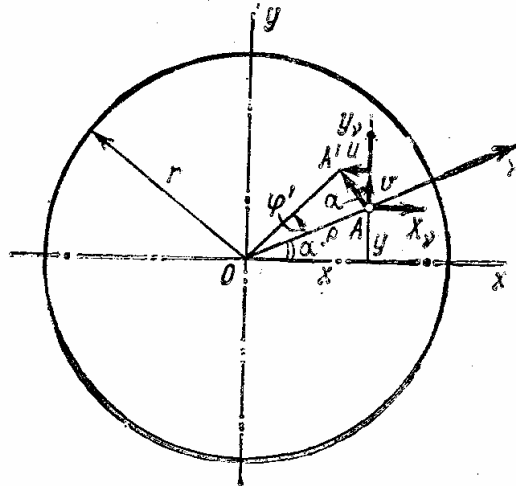


Рис. 15

Подставляя перемещения (а) в формулы (4.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= 0, & \gamma_{xy} &= 0; \\ \varepsilon_y &= 0, & \gamma_{yz} &= \varphi' x; \\ \varepsilon_z &= 0, & \gamma_{zx} &= -\varphi' y. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Таким образом, из составляющих деформаций отличны от нуля только две угловые деформации в плоскостях yOz и xOz . Интересно отметить, что при кручении объем тела не меняется, так как согласно формуле (2.6) объемная деформация $\theta = 0$.

По формулам закона Гука (4.6) находим составляющие напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 0, & \tau_{xy} &= 0; \\ \sigma_y &= 0, & \tau_{yz} &= \mu\varphi' x; \\ \sigma_z &= 0, & \tau_{zx} &= -\mu\varphi' y. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Из составляющих напряжений отличны от нуля только две.

Рассмотрим условия на боковой поверхности бруса. Направляющие косинусы нормали ν в любой точке боковой поверхности, согласно рис. 15, равны:

$$l = \cos \alpha, \quad m = \sin \alpha, \quad n = 0. \quad (б)$$

После подстановки напряжений (5.6) и направляющих косинусов (б) в условия на поверхности (4.2) находим $X_\nu = Y_\nu = Z_\nu = 0$, т. е. боковая поверхность свободна от нагрузок.

На правом торце при $z = L$ направляющие косинусы составляют $m = 0$ и $n = 1$ и условия на поверхности (4.2) дают

$$X_\nu = -\mu\varphi'y; \quad Y_\nu = \mu\varphi'x; \quad Z_\nu = 0. \quad (в)$$

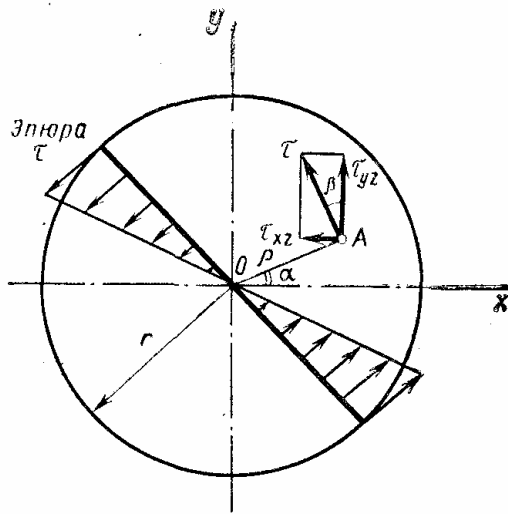


Рис. 16

Равнодействующие внутренних сил на правом торце:

$$Q_x = \int_F X_v dF; \quad Q_y = \int_F Y_v dF;$$

$$M_z = \int_F (Y_v x - X_v y) dF.$$

Подставляя в эти выражения напряжения (в), находим

$$Q_x = -\mu\varphi' \int_F y dF = 0;$$

$$Q_y = \mu\varphi' \int_F x dF = 0,$$

так как входящие сюда интегралы представляют собой статические моменты площади сечения относительно центральных осей x и y , а

$$M_z = \mu\varphi' \int_F (x^2 + y^2) dF = \mu\varphi' J_p = M_0, \quad (г)$$

так как входящий сюда интеграл представляет собой полярный момент инерции.

Таким образом, напряжения на правом торце сводятся к паре сил с моментом M_0 в плоскости торца. Аналогично можно показать, что и на левом торце напряжения сводятся к паре сил, но противоположного направления. Следовательно, перемещения (а), деформации (5.5) и напряжения (5.6) являются решением задачи о кручении круглого бруса постоянного сечения.

В заключение найдем равнодействующие касательных напряжений в каждой точке поперечного сечения и установим закон их распределения по сечению. На рис. 16 показаны составляющие напряжений в точке A с учетом их знаков согласно формулам (5.6). Равнодействующая

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \mu\varphi' \rho, \quad (5.7)$$

или с учетом соотношения (г)

$$\tau = M_0 \rho / J_p, \quad (5.8)$$

т. е. касательные напряжения τ распределяются по сечению пропорционально расстоянию точки ρ до центра сечения. На том же рисунке показана эпюра этих напряжений вдоль одного из диаметров, причем

$$\operatorname{tg} \beta = |\tau_{xz} / \tau_{yz}| = y/x = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, направление напряжений τ перпендикулярно радиус-вектору в каждой точке поперечного сечения. Следовательно, решение задачи о кручении круглого бруса постоянного сечения совпадает с решением, полученным в сопротивлении материалов.

С помощью остальных уравнений теории упругости полезно самостоятельно убедиться, что в рассмотренном случае, как и при чистом изгибе, полностью соблюдается гипотеза плоских сечений.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГЛАВА VI

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 1. Плоская деформация

Все уравнения теории упругости значительно упрощаются в тех случаях, когда задачу можно свести к отысканию функций только двух переменных, например x и y . В упругом теле плоская деформация возникает, если перемещения происходят только параллельно плоскости xOy :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \quad (a)$$

Такие перемещения возникают в длинном призматическом или цилиндрическом теле, продольная ось которого параллельна оси Oz , при действии нагрузки, перпендикулярной этой оси и постоянной вдоль нее. Близкими к этому случаю являются задачи о длинной подпорной стенке или плотине (рис. 17, а), тоннеле метрополитена (рис. 17, б), длинном цилиндрическом катке (рис. 17, в), длинной пластинке (рис. 17, г) при условии, что нагрузка не меняется вдоль оси Oz . В таких задачах приходится иметь дело с деформациями, которые возникают только в плоскости xOy . Подставляя составляющие перемещения (а) в формулы (4.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y), & \varepsilon_z &= 0; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y), & \gamma_{yz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y), & \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Отсутствие линейных деформаций в направлении оси Oz ведет тем не менее к появлению нормальных напряжений σ_z . Эти напряжения зависят от напряжений, действующих в плоскости xOy . Действительно, из третьей формулы закона Гука (4.5) при отсутствии деформации ε_z следует, что

$$\varepsilon_z = [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (6.1)$$

Подставляя это соотношение в первые две формулы (4.5), находим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right); \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Из анализа формул (б), (в) и (4.6) следует, что

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

На основании соотношения (6.1) напряжение σ_z также является функцией только двух координат:

$$\sigma_z = \sigma_z(x, y).$$

Основные уравнения теории упругости в случае плоской деформации упрощаются следующим образом. Из дифференциальных уравнений равновесия (4.1) остаются только два:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

а третье обращается в тождество.

Так как на боковой поверхности во всех точках направляющий косинус $n = 0$,

то из условий на поверхности (4.2) остаются также только два:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m; \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Шесть геометрических соотношений Коши (4.3) сводятся к трем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u / \partial x; \\ \varepsilon_y &= \partial v / \partial y; \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Из шести уравнений неразрывности деформаций (4.4) остается только одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (6.5)$$

а остальные обращаются в тождества.

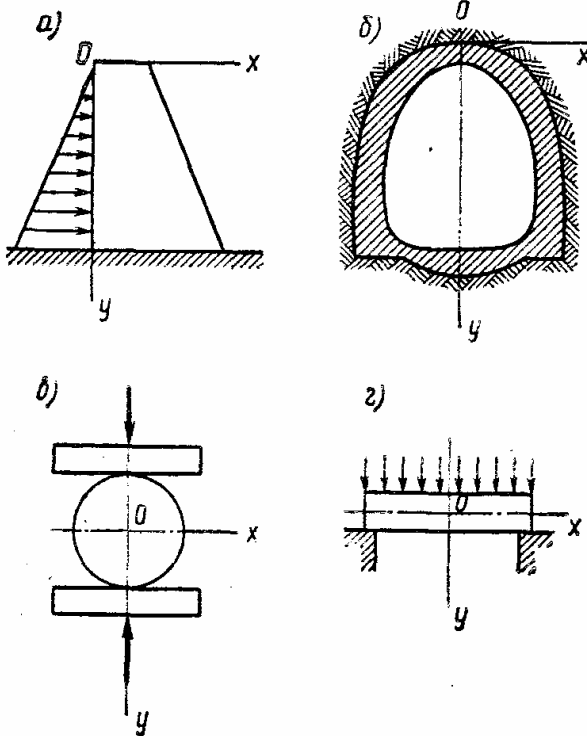


Рис. 17

Из шести формул закона Гука (4.5) с учетом соотношений (6), (в) и (3.1) остаются только три:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right); \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Если ввести новые упругие постоянные

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E/(1-\nu^2); \\ \nu_1 &= \nu/(1-\nu), \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

то эти формулы примут более удобный вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

причем значение коэффициента пропорциональности в третьем уравнении не меняется:

$$2(1+\nu)/E = 2(1+\nu_1)/E_1.$$

§ 2. Обобщенное плоское напряженное состояние

В задаче о тонкой пластинке, нагруженной по боковой поверхности силами, параллельными ее основаниям и равномерно распределенными по толщине (рис. 18), возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации. В этом случае, называемом *обобщенным плоским напряженным состоянием*, напряжения σ_z , τ_{yz} и τ_{xz} на основаниях пластинки равны нулю. Так как пластинка тонкая, то можно считать, что эти напряжения равны нулю и по всему объему пластинки. По той же причине остальные напряжения можно считать постоянными по толщине пластинки, т. е. не зависящими от координаты z , \bar{y} , таким образом, возникает приблизительно следующее напряженное состояние:

$$\begin{aligned} \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} &= 0, \quad \sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

Замечаем, что в отношении напряжений обобщенное плоское напряженное состояние отличается от плоской деформации лишь условием $\sigma_z = 0$. Переходя к деформациям, с помощью третьей формулы закона Гука (4.5) получаем, что составляющая

$$\varepsilon_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E$$

не равна нулю. Следовательно, основания пластинки будут несколько искривляться.

При этих предположениях основные уравнения плоской деформации — дифференциальные уравнения равновесия (6.2), условия на поверхности (6.3), геометрические соотношения Коши (6.4) и уравнение неразрывности деформаций (6.5) — сохраняют такой же вид и в задаче об обобщенном плоском напряженном состоянии, а формулы закона Гука (4.5) принимают следующий вид:

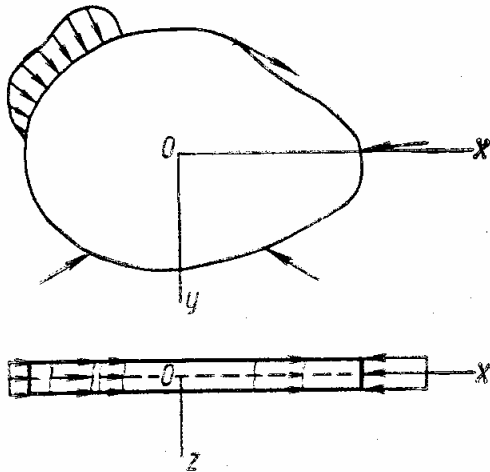


Рис. 18

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E; \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu)\tau_{xy}/E. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Последние отличаются от формул закона Гука для плоской деформации (6.7) только значениями упругих постоянных. Следовательно, при решении задач о плоской деформации и обобщенном плоском напряженном состоянии можно пользоваться одними и теми же уравнениями и объединять обе задачи в одну: плоскую задачу теории упругости.

В плоской задаче теории упругости неизвестными являются восемь функций: три составляющие напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} ; три составляющие деформаций ε_x , ε_y , γ_{xy} и две составляющие перемещений u и v . Уравнений для решения задачи также восемь: два дифференциальных уравнения равновесия (6.2), три геометрических соотношения Коши (6.4) и три формулы закона Гука (6.7) или (6.8).

Если по условию задачи перемещения искать не нужно, то остается шесть неизвестных: три составляющие напряжений и три составляющие деформаций. Для их определения достаточно остающихся шести уравнений: двух дифференциальных уравнений равновесия (6.2), трех формул закона Гука (6.7) или (6.8) и одного уравнения неразрывности деформаций (6.5).

§ 3. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений

Решение плоской задачи в напряжениях сводится к отысканию трех неизвестных функций $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ и $\tau_{xy}(x, y)$. Для этого имеются два дифференциальных уравнения равновесия (6.2). К ним следует добавить уравнение неразрывности деформаций (6.5), заменив в нем деформации на напряжения посредством формул закона Гука (6.8) для обобщенного плоского напряженного состояния. После упрощения получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (a)$$

Исключим из этого уравнения касательное напряжение τ_{xy} . Для этого первое уравнение равновесия (6.2) продифференцируем по x , а второе — по y , и почленно сложим. Считая, как и в пространственной задаче, объемные силы постоянными, найдем

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

Подставив это соотношение в уравнение (а), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или короче

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (6.9)$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений в плоской задаче есть гармоническая функция. Это условие носит название *уравнения Леви* и выведено для обобщенного плоского напряженного состояния. Оно не содержит упругих постоянных и поэтому в случае плоской деформации имеет такой же вид.

Следовательно, решение плоской задачи теории упругости при постоянстве объемных сил сведено к интегрированию трех уравнений: двух уравнений равновесия (6.2) и уравнения неразрывности деформаций (6.9) при обязательном удовлетворении условий на поверхности (6.3).

Решение плоской задачи можно упростить, сведя ее к отысканию одной функции $\varphi(x, y)$, называемой *функцией напряжений Эри*. Ее выбирают с таким расчетом, чтобы дифференциальные уравнения равновесия (6.2) обращались в тождества. Эти условия будут удовлетворены, если напряжения выразить через функцию Эри следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Действительно, подставляя эти выражения в уравнения равновесия (6.2), получаем тождества, т. е. принятая функция напряжений $\varphi(x, y)$ является решением этих уравнений.

Подставляя теперь напряжения (6.10) в уравнение неразрывности деформаций (6.9), находим

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (6)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой оператор Лапласа над функцией $\varphi(x, y)$. Поэтому уравнение (6) может быть представлено с помощью оператора Лапласа так:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

или

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (в)$$

Левая часть последнего уравнения читается как «набла четыре ф» и называется двойным оператором Лапласа над функцией φ . Функция, подчиняющаяся уравнению (в), называется бигармонической, а само уравнение — бигармоническим уравнением. Представим его в развернутом виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Произведем дифференцирование:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (6.11)$$

Выразим условия на поверхности для плоской задачи (6.3) через функцию напряжений с помощью уравнений (6.10):

$$\begin{aligned} X_v &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) m; \\ Y_v &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m. \end{aligned}$$

Итак, плоская задача теории упругости сведена к отысканию одной бигармонической функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей заданным условиям на контуре.

§ 4. Методы решения плоской задачи для прямоугольных односвязных областей

Отыскание бигармонической функции, удовлетворяющей условиям на контуре прямоугольной области, возможно различными методами. Ограничимся рассмотрением лишь некоторых из них: решением плоской задачи в полиномах (целых функциях), в тригонометрических рядах, с помощью конечных разностей.

1. Решение в полиномах. Решение плоской задачи осуществимо полуобратным методом, если сначала задаться аналитической формой функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению (6.11), а затем определить, каким нагрузкам на контуре она соответствует. В качестве бигармонической функции можно принимать алгебраические полиномы разных степеней.

Полином первой степени $\varphi_1 = a_1 x + b_1 y$ как функция напряжений нас не интересует, так как напряжения, подсчитанные по формулам (6.10), окажутся равными нулю.

Рассмотрим функцию напряжений в виде полинома второй степени

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (6.12)$$

Четвертые производные этой функции:

$$\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} = 0; \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} = 0,$$

и, следовательно, уравнение (6.11) обращается в тождество при любых значениях коэффициентов a_2, b_2, c_2 . Таким образом, полином второй степени является бигармонической функцией и может быть применен к решению плоской задачи.

Если функцию напряжений принять в виде полинома третьей степени

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{c_3}{1 \cdot 2} x y^2 + \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3, \quad (6.13)$$

то уравнение (6.11) по-прежнему будет обращаться в тождество при произвольных значениях коэффициентов a_3, b_3, c_3 и d_3 , т. е. полином третьей степени является бигармонической функцией и также может быть применен для решения плоской задачи.

Зададим функцию $\varphi(x, y)$ в виде полинома четвертой степени:

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2 \cdot 2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{2 \cdot 3} x y^3 + \frac{e_4}{3 \cdot 4} y^4. \quad (6.14)$$

Четвертые производные этой функции:

$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^4} = 2a_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial y^4} = 2e_4.$$

Подставляя их в бигармоническое уравнение (6.11), получаем

$$2a_4 + 2c_4 + 2e_4 = 0,$$

откуда

$$e_4 = -a_4 - c_4. \quad (a)$$

Таким образом, не все коэффициенты полинома четвертой степени произвольны. Независимыми могут быть только четыре коэффициента, например a_4, b_4, c_4 и d_4 , а пятый следует взять из соотношения (a). Следовательно, для того чтобы полином четвертой степени был бигармонической функцией, он должен иметь такой вид:

$$\varphi_4 = a_4 \left(\frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + c_4 \left(\frac{x^2 y^2}{2 \cdot 2} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{d_4}{2 \cdot 3} x y^3.$$

Рассмотрим полином пятой степени:

$$\begin{aligned} \varphi_5 = & \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{2 \cdot 3} x^2 y^3 + \frac{e_5}{3 \cdot 4} x y^4 + \\ & + \frac{f_5}{4 \cdot 5} y^5. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Четвертые производные этой функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^4} &= 6a_5 x + 2b_5 y; \\ \frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^2 \partial y^2} &= 2c_5 x + 2d_5 y; \\ \frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial y^4} &= 2e_5 x + 6f_5 y. \end{aligned}$$

Подставляя их в бигармоническое уравнение (6.11) и группируя слагаемые по аргументам x и y , получаем

$$2(3a_5 + 2c_5 + e_5)x + 2(b_5 + 2d_5 + 3f_5)y = 0.$$

Чтобы это уравнение обращалось в тождество при любых значениях аргументов, необходимо коэффициенты при этих переменных приравнять нулю:

$$\left. \begin{aligned} 3a_5 + 2c_5 + e_5 &= 0; \\ b_5 + 2d_5 + 3f_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если независимыми принять коэффициенты a_5 , b_5 , c_5 и d_5 , то остальные два выразятся через них согласно уравнениям (6) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} e_5 &= -3a_5 - 2c_5; \\ f_5 &= -\frac{1}{3}b_5 - \frac{2}{3}d_5. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Внося коэффициенты e_5 и f_5 из соотношений (в) в формулу (6.15), находим

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= \frac{a_5}{5 \cdot 4} (x^5 - 5xy^4) + \frac{b_5}{4 \cdot 3} \left(x^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right) + \\ &+ \frac{c_5}{3 \cdot 2} (x^3 y^2 - xy^4) + \frac{d_5}{2 \cdot 3} \left(x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

В такой форме полином пятой степени является бигармонической функцией и применим к решению плоской задачи.

С помощью алгебраических полиномов можно решить ряд простых задач: задачу о чистом изгибе балки, изгибе балки на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки, задачу о треугольной подпорной стенке.

2. Метод тригонометрических рядов Рибьера—Файлона. В качестве функции напряжений $\varphi(x, y)$ можно применять тригонометрические ряды. Исследуем с этой целью тригонометрическую функцию

$$\varphi = Y \cos \alpha x,$$

где Y — функция, зависящая только от координаты y ;

$$\alpha = n\pi/l; \quad (г)$$

n — любое целое число; l — длина пластинки в направлении оси x .

Выясним, при каких условиях функция φ является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению (6.11). Подсчитаем четвертые производные функции φ :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 Y \cos \alpha x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 Y'' \cos \alpha x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cos \alpha x.$$

Подставляя их в указанное уравнение, получаем

$$\alpha^4 Y \cos \alpha x - 2\alpha^2 Y'' \cos \alpha x + Y^{IV} \cos \alpha x = 0,$$

или

$$\cos \alpha x (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) = 0.$$

Это уравнение обращается в тождество при любых значениях аргумента x , если $Y(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0,$$

решение которого можно представить с помощью гиперболических функций:

$$Y = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y. \quad (6.17)$$

Подставляя это решение в выражение функции φ , получим бигармоническую функцию в виде

$$\varphi = (x, y) = \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y).$$

Аналогично можно показать, что функция

$$\varphi(x, y) = \sin \alpha x (A'_n \operatorname{ch} \alpha y + B'_n y \operatorname{ch} \alpha y + C'_n \operatorname{sh} \alpha y + D'_n y \operatorname{sh} \alpha y)$$

также является бигармонической и может быть применена для решения плоской задачи.

Если числу n в соотношении (6.17) давать различные значения, то каждый раз будут получаться новые функции, отличающиеся значениями параметра α и постоянных A_n, B_n, C_n, D_n . Поэтому общее решение бигармонического уравнения (6.11) может быть представлено как сумма всех его возможных частных решений, т. е. в виде бесконечного ряда

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [& \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + \\ & + D_n y \operatorname{sh} \alpha y) + \sin \alpha x (A'_n \operatorname{ch} \alpha y + B'_n y \operatorname{ch} \alpha y + C'_n \operatorname{sh} \alpha y + \\ & + D'_n y \operatorname{sh} \alpha y)]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Постоянные $A_n, B_n, \dots, C'_n, D'_n$ определяются из условий на контуре. Нагрузка на контуре должна быть разложена в тригонометрический ряд Фурье по синусам и косинусам.

С помощью функции напряжений (6.18), добавляя в случае необходимости степенные полиномы, можно получить решения для более широкого круга задач, чем с помощью только степенных полиномов. Среди них можно назвать задачу об изгибе балки-стенки, задачу о действии на пластинку нагрузок, распределенных вдоль контура по любому закону (в том числе сосредоточенной силы).

3. Метод конечных разностей (метод сеток). Точное решение бигармонического уравнения плоской задачи во многих случаях оказывается очень сложным. Для его упрощения можно применить приближенный метод конечных разностей, который позволяет заменить дифференциальное уравнение системой линейных алгебраических уравнений.

Установим зависимости между производными функции в произвольной точке и значениями самой функции в этой и в соседних точках. На рис. 19 изображена кривая $\varphi(x)$ и показаны пять точек, абс-

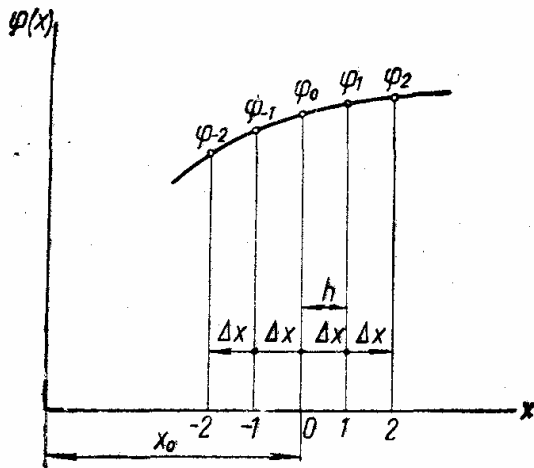


Рис. 19

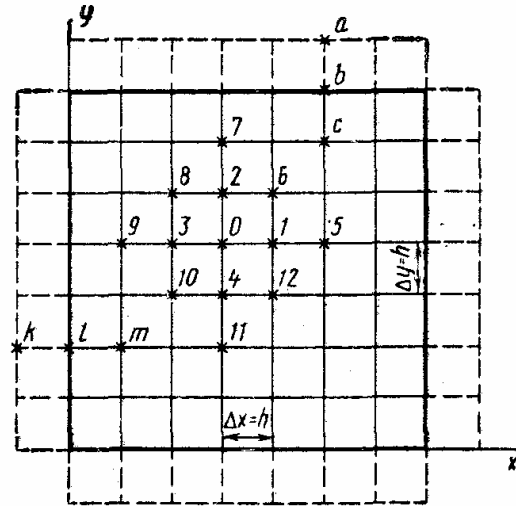


Рис. 20

циссы которых отличаются на малую величину Δx . По определению, производная функции $\varphi(x)$ в точке 0

$$\varphi'_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_1 - \varphi_{-1}}{2\Delta x}.$$

Если интервал между двумя точками $h = \Delta x$ мал, то производную в точке 0 приближенно можно представить так:

$$\varphi'_0 = (\varphi_1 - \varphi_{-1}) / (2h). \quad (\text{д})$$

Аналогично можно представить производную в точке 1:

$$\varphi'_1 = (\varphi_2 - \varphi_0) / (2h)$$

и в точке -1 :

$$\varphi'_{-1} = (\varphi_0 - \varphi_{-2}) / (2h).$$

Вторую производную в точке 0 можно получить, используя дважды представление первой производной:

$$\begin{aligned} \varphi''_0 &= (\varphi')'_0 = (\varphi'_1 - \varphi'_{-1}) / (2h) = [(\varphi_2 - \varphi_0) / (2h) - \\ &- (\varphi_0 - \varphi_{-2}) / (2h)] / (2h) = (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_{-2}) / (4h^2). \end{aligned}$$

Уменьшив интервал в два раза, можно получить более точное значение второй производной в точке 0:

$$\varphi''_0 = (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1}) / h^2. \quad (\text{е})$$

Далее вычисляем третью производную в точке 0:

$$\begin{aligned} \varphi'''_0 &= (\varphi'')'_0 = (\varphi''_1 - \varphi''_{-1}) / (2h) = [(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0) / h^2 - \\ &- (\varphi_0 - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2}) / h^2] / (2h) = (\varphi_2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_{-1} - \varphi_{-2}) / (2h^3), \quad (\text{ж}) \end{aligned}$$

а затем и четвертую:

$$\begin{aligned} \varphi_4^{IV} &= (\varphi''')_0'' = (\varphi_1'' - 2\varphi_0'' + \varphi_{-1}'')/h^2 = [(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0)/h^2 - \\ &- 2(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1})/h^2 + (\varphi_0 - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2})/h^2]/h^2 = \\ &= (\varphi_2 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_{-1} + \varphi_{-2})/h^4. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае плоской задачи функция φ будет зависеть от двух координат x и y , поэтому появится необходимость выражать через конечные разности частные производные. Для этого исследуемую плоскую область (рис. 20) разбивают сеткой на ячейки с размерами Δx и Δy . Для упрощения расчетов сетку выбирают с квадратными ячейками, т. е. принимают $\Delta x = \Delta y = h$. Частные производные функции $\varphi(x, y)$ в точке 0 могут быть выражены через значения функции в 13 точках, пронумерованных на указанном рисунке.

Первые и вторые производные в точке 0 по одной из координат легко составить по аналогии с формулами (д) и (е):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 &= (\varphi_1 - \varphi_3)/(2h); \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 &= (\varphi_2 - \varphi_4)/(2h); \end{aligned} \right\} \quad (и)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 &= (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3)/h^2; \\ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 &= (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4)/h^2. \end{aligned} \right\} \quad (к)$$

Вторую смешанную производную в точке 0 найдем, применив дважды формулы (и):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2h} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_4 \right] = \\ &= \frac{1}{2h} \left[\frac{1}{2h} (\varphi_6 - \varphi_8) - \frac{1}{2h} (\varphi_{12} - \varphi_{10}) \right] = \frac{1}{4h^2} (\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}). \end{aligned} \quad (л)$$

Четвертые частные производные по одной из координат в точке 0 составим согласно формуле (з):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4} (\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_3 + \varphi_9); \\ \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 &= \frac{1}{h^4} (\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_0 - 4\varphi_4 + \varphi_{11}). \end{aligned} \right\} \quad (м)$$

а четвертую смешанную производную найдем, применяя дважды формулу (к):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_2 - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_4 \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} [(\varphi_6 - 2\varphi_2 + \varphi_8)/h^2 - 2(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3)/h^2 + (\varphi_{12} - 2\varphi_4 + \varphi_{10})/h^2] = \\ &= \frac{1}{h^4} [4\varphi_0 - 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + (\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12})]. \end{aligned} \quad (н)$$

Связь между функциями в 13 рассматриваемых точках установим с помощью бигармонического уравнения плоской задачи (6.11). В точке 0 оно принимает такой вид:

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 = 0.$$

Подставляя в него выражения четвертых производных (м) и (н), получаем

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0. \quad (6.19)$$

Напряжения в точке 0 найдем с помощью формул (6.10) без учета объемных сил:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} (\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4); \\ (\sigma_y)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3); \\ (\tau_{xy})_0 &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 = -\frac{1}{4h^2} (\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}). \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Уравнения вида (6.19) можно составить для каждого из узлов внутри контура; при этом в часть уравнений войдут и значения функции φ для узлов на контуре и для узлов, расположенных на расстоянии одного шага вне контура. На рис. 20 внеконтурная сетка показана штриховыми линиями.

Значения функции φ на контуре и вне контура находят из граничных условий. Таким образом, неизвестных значений функции окажется столько, сколько узлов внутри контура, но столько же можно составить и уравнений вида (6.19). Следовательно, для решения задачи уравнений достаточно.

Для определения значений функции на контуре и вне его используем идеи проф. А. П. Синицына, который предложил рассматривать значения функции φ на контуре исследуемой области как изгибающий момент в балке с такой же нагрузкой, что и на данном краю области. Действительно, если на верхней грани прямоугольной области приложена нагрузка $q(x)$, направленная вниз, то для этой грани можно составить следующее условие:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q. \quad (o)$$

Сравнивая его с зависимостью между изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки при изгибе балок

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q,$$

закключаем, что функцию напряжений φ на контуре пластинки можно принять за значение изгибающего момента в данной точке балки с такой же нагрузкой. При этом балка может иметь любое закрепление

так как его характер оказывает влияние только на значения постоянных, появляющихся после интегрирования соотношения (о):

$$\varphi = M + C_1 x + C_2. \quad (\text{п})$$

На напряжения вид закрепления балки влияния не окажет, поскольку напряжения равны вторым производным функции φ и постоянные C_1, C_2 в их выражения не войдут. На нижней грани пластинки функцию φ следует брать равной значению изгибающего момента с обратным знаком.

Производные функции φ на верхней и нижней гранях $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, а на боковых $-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ представляют собой поперечные силы в соответствующих точках балки.

Производные $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ на верхней и нижней гранях и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ на боковых можно найти из формулы

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Значения производных в точках контура можно использовать и для определения значений функции в точках вне контура. Так, для точки b (см. рис. 20) согласно формуле (и) можно составить следующее соотношение:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_b = \frac{1}{2h} (\varphi_a - \varphi_c).$$

Отсюда находим значение функции φ в точке a , расположенной вне контура пластинки:

$$\varphi_a = \varphi_c + 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_b. \quad (6.21)$$

Точно так же для точки l , лежащей на боковой грани,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_l = \frac{1}{2h} (\varphi_m - \varphi_k),$$

откуда значение функции φ в точке k , лежащей вне контура пластинки,

$$\varphi_k = \varphi_m - 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_l. \quad (6.22)$$

Таким образом, плоская задача сведена к отысканию значений функции $\varphi(x, y)$ во всех узлах сетки. Для этого, как отмечалось выше, имеем столько уравнений вида (6.19), сколько узлов внутри пластинки. Значения функции на контуре пластинки находим из граничных условий с помощью соотношений (п), а вне контура — с помощью соотношений (6.21) и (6.22). Решая систему уравнений вида (6.19), находим значения функции φ , а с помощью уравнений (6.20) определяем напряжения во всех узлах сетки.

Метод конечных разностей оказывается особенно эффективным при использовании цифровых вычислительных машин (ЦВМ). Этот метод

требует многократного циклического повторения расчета по одним и тем же формулам для каждого интервала. Он сводит решение задачи к выполнению простейших арифметических действий. Такими возможностями как раз и обладают ЦВМ.

Система линейных алгебраических уравнений типа (6.19) хорошо поддается программированию на ЦВМ. С увеличением частоты сетки повышается точность расчета. Однако оптимальный шаг сетки следует выбирать с учетом вычислительных возможностей применяемой машины.

Применение метода конечных разностей особенно эффективно при расчете сложных пластинок, когда контур непрямоугольный, когда пластинка имеет отверстия и т. д.

§ 5. Изгиб консоли силой, приложенной на конце

Задачу будем решать обратным методом в напряжениях. Схема балки изображена на рис. 21. Зададимся напряжениями, получаемыми методами сопротивления материалов, и проверим, удовлетворяют ли они основным уравнениям плоской задачи теории упругости и соответствуют ли заданной нагрузке.

В сопротивлении материалов для поперечного изгиба имеем следующую систему напряжений:

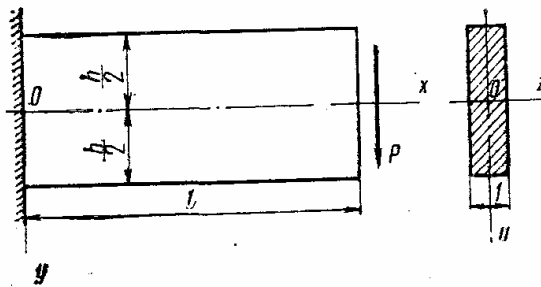


Рис. 21

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= M_z y / J_z; \\ \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= Q_y S_z^0 / [J_z b(y)]. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Подсчитываем входящие сюда величины:
изгибающий момент

$$M_z = -P(l - x);$$

поперечная сила

$$Q_y = P;$$

статический момент площади отсеченной части сечения относительно нейтральной оси

$$S_z^0 = (h^2/4 - y^2)/2;$$

момент инерции площади сечения относительно нейтральной оси

$$J_z = (1 \cdot h^3)/12 = h^3/12;$$

ширина сечения $b(y) = 1$.

Подставляя эти величины в уравнения (а), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -12P(l - x)y/h^3; \\ \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= 6P(h^2/4 - y^2)/h^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

Собственным весом балки пренебрегаем. Тогда при подстановке напряжений (6.23) в уравнения равновесия (6.2) и уравнение неразрывности деформаций (6.9) убеждаемся, что они обращаются в тождества. Таким образом, напряжения (6.23) удовлетворяют основным уравнениям плоской задачи теории упругости.

Переходим к рассмотрению условий на контуре. На верхней и нижней гранях балки никаких нагрузок нет, поэтому должно выполняться следующее условие: при $y = \pm h/2$ $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

Подставляя сюда напряжения из (6.23), убеждаемся, что условие действительно выполняется.

На торце нормальных напряжений нет, а касательные должны уравновесить силу P . Поскольку закон их распределения неизвестен, соответствующее условие должно быть записано в интегральной форме. Итак, при $x = l$

$$\sigma_x = 0; \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} dy = P.$$

Воспользовавшись вновь значениями напряжений (6.23), находим, что условия на торце тоже выполняются.

Таким образом, напряжения, полученные на основании гипотезы плоских сечений, подтверждаются теорией упругости, когда сила P распределена по такому же закону, как и касательные напряжения. При другом законе распределения силы P выражения напряжений будут иными, но на основании принципа Сен-Венана значительная разница будет только вблизи торца.

Для полного решения задачи вычислим деформации и перемещения. По формулам закона Гука для плоской задачи (6.8) после подстановки в них напряжений (6.23) находим:

$$\epsilon_x = -\frac{12P}{Eh^3}(l-x)y; \epsilon_y = \frac{12\nu P}{Eh^3}(l-x)y; \gamma_{xy} = \frac{12(1+\nu)P}{Eh^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right).$$

Согласно формулам (6.4),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{12P}{Eh^3}(l-x)y; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{12\nu P}{Eh^3}(l-x)y; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{12(1+\nu)P}{Eh^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right). \quad (в)$$

Интегрируя уравнения (6), находим

$$\left. \begin{aligned} u &= 12P/(Eh^3) [-(lx - x^2/2)y + f_1(y)]; \\ v &= 12P/(Eh^3) [\nu(l-x)y^2/2 + f_2(x)], \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — произвольные функции.

Подставляя перемещения (г) в уравнение (в), имеем

$$\frac{12P}{Eh^3} \left[-\left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + f_1'(y) \right] + \frac{12P}{Eh^3} \left[-\frac{vy^2}{2} + f_2'(x) \right] = \frac{12(1+\nu)P}{Eh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right),$$

или после сокращения и приведения подобных членов

$$\left[f_2'(x) - \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \left[f_1'(y) + \frac{2+\nu}{2} y^2 \right] = (1+\nu) \frac{h^2}{4}. \quad (д)$$

Полученное равенство может существовать при произвольных значениях x и y только в том случае, если выражения, стоящие в квадратных скобках, постоянны:

$$\left. \begin{aligned} f_2'(x) - (lx - x^2/2) &= C_1; \\ f_1'(y) + (2+\nu)y^2/2 &= C_2. \end{aligned} \right\} \quad (е)$$

Кроме того, из уравнения (д) вытекает следующая зависимость между постоянными:

$$C_1 + C_2 = (1+\nu) h^2/4. \quad (ж)$$

Интегрируя уравнения (е), находим:

$$f_2(x) = lx^2/2 - x^3/6 + C_1x + C_3; \quad f_1(y) = -(2+\nu)y^3/6 + C_2y + C_4.$$

Подставляя полученные функции в формулы (г), получим

$$\left. \begin{aligned} u &= 12P \left[-(lx - x^2/2)y - (2+\nu)y^3/6 + C_2y + C_4 \right] / (Eh^3); \\ v &= 12P \left[\nu(l-x)y^2/2 + lx^2/2 - x^3/6 + C_1x + C_3 \right] / (Eh^3). \end{aligned} \right\} \quad (з)$$

Для определения произвольных постоянных C_1 , C_2 , C_3 и C_4 рассмотрим закрепление балки. В сопротивлении материалов все рассуждения относят к оси бруса, поэтому защемление в плоской задаче теории упругости должно обеспечивать неподвижность точки 0 и отсутствие поворота оси балки вокруг этой точки, т. е. при $x = y = 0$

$$u = v = 0, \quad \partial v / \partial x = 0.$$

При этих условиях из формул (з) находим

$$C_4 = C_3 = C_1 = 0$$

и из уравнения (ж) —

$$C_2 = (1+\nu) h^2/4.$$

Тогда формулы (з) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{12P}{Eh^3} \left[-\left(l - \frac{x}{2} \right) xy - \frac{2+\nu}{6} y^3 + \frac{(1+\nu)h^2}{4} y \right]; \\ v &= \frac{12P}{Eh^3} \left[\frac{\nu(l-x)}{2} y^2 + \frac{l}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Из второго уравнения (6.24), положив $y = 0$, получим уравнение изогнутой оси балки

$$v = 12P (lx^2/2 - x^3/6) / (Eh^3),$$

которое совпадает с уравнением в сопротивлении материалов.

Проверим теперь справедливость гипотезы плоских сечений. Уравнение произвольного поперечного сечения до деформирования

$$x = x_0$$

после деформирования примет вид

$$x = x_0 + u|_{x=x_0}.$$

После подстановки выражения перемещения u из формул (6.24)

$$x = x_0 + \frac{12P}{Eh^3} \left[-\left(l - \frac{x_0}{2}\right) x_0 y - \frac{2+\nu}{6} y^3 + \frac{(1+\nu) h^2}{4} y \right].$$

Значит, поперечное сечение не остается плоским, а искривляется по кубической параболе. Следовательно, формула (а) для нормальных напряжений σ_x , выведенная на основании гипотезы плоских сечений, остается справедливой и при искривлении сечений.

§ 6. Балка на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки

Схема балки показана на рис. 22. Решение задачи можно получить, если функцию напряжений принять в виде суммы полиномов пятой, третьей и второй степеней. При этом следует учесть, что ось y является осью симметрии, и поэтому члены, содержащие x в нечетной степе-

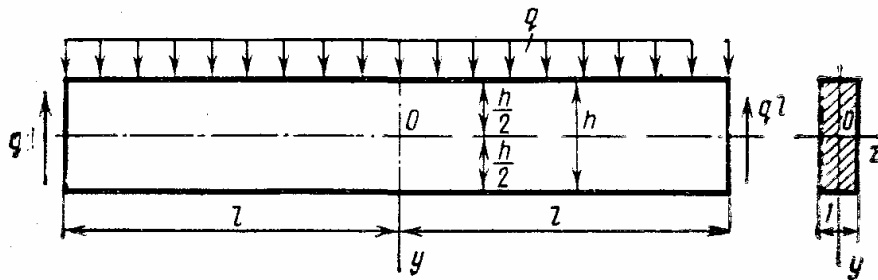


Рис. 22

ни, следует отбросить. Таким образом, складывая полиномы (6.16) (6.13) и (6.12), с учетом симметрии получаем следующую функцию напряжений:

$$\varphi = \frac{b_5}{4 \cdot 3} \left(x^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{d_5}{2 \cdot 3} \left(x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{b_3}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} y^2.$$

Подставляя ее в формулы (6.10) и пренебрегая объемными силами, получаем систему напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{b_5}{3} y^3 + d_5 \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2; \\ \sigma_y &= b_5 x^2 y + \frac{d_5}{3} y^3 + b_3 y + a_2; \\ \tau_{xy} &= -\frac{b_5}{3} x^3 - d_5 xy^2 - b_3 x. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для определения постоянных имеем следующие граничные условия:

на верхней грани при $y = -h/2$

$$\sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0;$$

на нижней грани при $y = +h/2$

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Подставляя в эти условия напряжения (a), получаем четыре уравнения:

$$\begin{aligned} -b_5 \frac{h}{2} x^2 - \frac{d_5}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 - b_3 \frac{h}{2} + a_2 &= -q; \\ -\frac{b_5}{3} x^3 - d_5 \left(\frac{h}{2} \right)^2 x - b_3 x &= 0; \\ b_5 \frac{h}{2} x^2 + \frac{d_5}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 + b_3 \frac{h}{2} + a_2 &= 0; \\ -\frac{b_5}{3} x^3 - d_5 \left(\frac{h}{2} \right)^2 x - b_3 x &= 0. \end{aligned}$$

Они распадаются на независимые уравнения

$$\begin{aligned} b_5 = 0; \quad -\frac{d_5}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 - b_3 \frac{h}{2} + a_2 = -q; \quad d_5 \left(\frac{h}{2} \right)^2 + b_3 = 0; \quad \frac{d_5}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^3 + \\ + b_3 \frac{h}{2} + a_2 = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим:

$$a_2 = -q/2, \quad b_3 = 3q/(2h), \quad d_5 = -6q/h_3.$$

Переходим к условиям на торцах: при $x = \pm l$

$$\sigma_x = 0, \quad \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} dy = \mp ql. \quad (б)$$

Так как закон распределения реакции по торцу не задан, то последнее условие требует, чтобы касательные напряжения на торце проводились к опорной реакции. После подстановки в это условие кас-

тельными напряжений из формул (а) получаем тождество. Нормальные напряжения σ_x при $x = \pm l$ составляют

$$\sigma_x = -6q(l^2y - 2y^3/3)/h^3 + d_3y + c_2 \quad (в)$$

и, следовательно, в нуль не обращаются, т. е. точно удовлетворить граничное условие для нормальных напряжений не удастся.

Рассмотрим приближенные граничные условия. Потребуем, чтобы на торцах обращались в нуль равнодействующая продольных усилий и их момент:

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x y dy = 0. \quad (г)$$

Подставляя в эти условия выражение нормального напряжения (в), получаем

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \left[-\frac{6q}{h^3} \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2 \right] dy = 0;$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} \left[-\frac{6q}{h^3} \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2 \right] y dy = 0,$$

откуда после интегрирования

$$c_2 = 0, \quad d_3 = 6q(l^2 - 0,1h^2)/h^3.$$

Таким образом, приближенные граничные условия на торцах (г) выполнены. Подобная замена точного граничного условия приближенным называется смягчением граничных условий. Условия (г) показывают, что действующие на торцах нормальные напряжения σ_x сводятся к взаимно уравновешенной системе сил, которая на основании принципа Сен-Венана оказывает заметное влияние на распределение напряжений лишь вблизи торцов балки.

Подставляя найденные постоянные в формулы (а), получаем окончательные значения напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 6q(l^2 - x^2)y/h^3 + 6q[2y^2/(3h^2) - 0,1]y/h; \\ \sigma_y &= -q(4y^3/h^3 - 3y/h + 1)/2; \\ \tau_{xy} &= -6q(h^2/4 - y^2)x/h^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Эпюры этих напряжений в сечениях балки длиной $l = 5h$, где они достигают наибольших абсолютных значений, показаны на рис. 23. Для сравнения определим напряжения по формулам сопротивления материалов:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= \frac{My}{J_z} = \frac{q(l^2 - x^2)y/2}{h^3/12} = 6q(l^2 - x^2)y/h^3; \\ \sigma_y^0 &= 0; \\ \tau_{xy}^0 &= \frac{QS_z^0}{J_z b(y)} = \frac{-qx(h^2/4 - y^2)/2}{(h^3/12) \cdot 1} = -6q(h^2/4 - y^2)x/h^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

Сравним максимальные значения нормальных напряжений σ_x , полученные по формулам (6.25) и (6.26). В первом случае при $x = 0$ и $y = h/2$

$$\max \sigma_x = (3ql^2/h^2) [1 + h^2 / (15l^2)];$$

во втором

$$\max \sigma_x^0 = 3ql^2/h^2.$$

Разница между ними зависит от отношения высоты балки к ее длине. Для балки длиной $l = 5h$ эта разница составляет всего $4/15\%$. С увеличением длины балки эта разница уменьшается. Таким образом, ги-

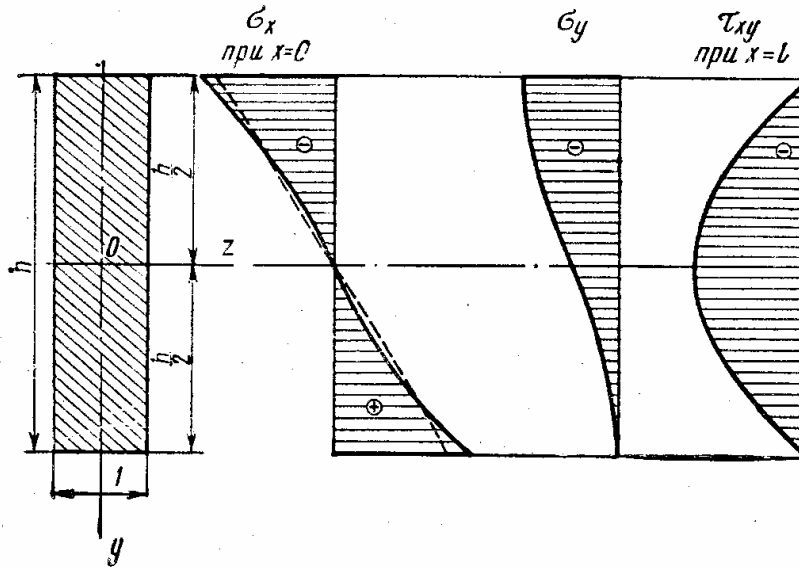


Рис. 23

потеза плоских сечений, на основе которой получена формула сопротивления материалов для напряжений σ_x^0 , в рассмотренной задаче вполне оправдывается. Эпюра этих напряжений показана на рис. 23 штриховой линией.

При решении задачи в сопротивлении материалов нормальными напряжениями σ_y пренебрегают. В решении (6.25), полученном методом теории упругости, при $y = -h/2$ имеем

$$\max \sigma_y = -q.$$

Сравнивая это значение с $\max \sigma_x$ для балки длиной $l = 5h$, получаем

$$\frac{|\max \sigma_y|}{\max \sigma_x} \cdot 100\% = 1,33\%.$$

Следовательно, принимаемая в сопротивлении материалов гипотеза о том, что продольные волокна балки друг на друга не давят, для балок длиной $l \geq 5h$ является вполне приемлемой.

Касательные напряжения τ_{xy}^0 , получаемые в сопротивлении материалов, полностью совпадают с напряжениями τ_{xy} , определяемыми методами теории упругости.

§ 7. Треугольная подпорная стенка

Иллюстрацией решения плоской задачи с помощью степенных полиномов для непрямоугольной области может служить задача о треугольной подпорной стенке. Рассмотрим подпорную стенку с заданным углом β у вершины, простирающуюся неограниченно в направлении оси y (рис. 24). Последнее исключает влияние связи стенки с основанием. Стенка загружена давлением воды, изменяющимся по линейному закону γy (γ — удельный вес воды), и собственным весом (γ_1 — объемный вес материала стенки). Толщина стенки в направлении, перпендикулярном плоскости xOy , равна единице.

Таким образом, кроме поверхностной нагрузки на стенку действуют составляющие объемной силы

$$X = 0, \quad Y = \gamma_1. \quad (a)$$

Поставленным условиям можно удовлетворить, взяв функцию напряжений в виде полинома третьей степени (6.13). Из формул (6.10) с учетом значения составляющих объемной силы (a) получаем следующую систему напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c_3 x + d_3 y; \\ \sigma_y &= a_3 x + b_3 y; \\ \tau_{xy} &= -b_3 x - c_3 y - \gamma_1 x. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Для определения входящих сюда коэффициентов сформулируем граничные условия сначала на вертикальной грани OA :

$$\sigma_x|_{x=0} = -\gamma y; \quad \tau_{xy}|_{x=0} = 0.$$

Подставляя в эти условия напряжения (б), получаем два уравнения:

$$-\gamma y = d_3 y, \quad 0 = -c_3 y;$$

отсюда

$$d_3 = -\gamma, \quad c_3 = 0$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\gamma y; \\ \sigma_y &= a_3 x + b_3 y; \\ \tau_{xy} &= -(b_3 + \gamma_1) x. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Переходим к граничным условиям на наклонной грани подпорной стенки OB :

$$X_v|_{x=y \operatorname{tg} \beta} = 0; \quad Y_v|_{x=y \operatorname{tg} \beta} = 0. \quad (г)$$

Направляющие косинусы грани:

$$l = \cos \beta; \quad m = \cos (\pi/2 + \beta) = -\sin \beta.$$

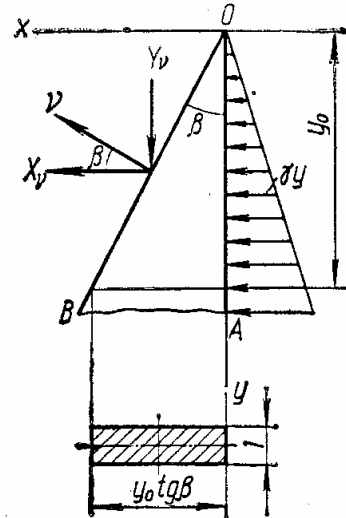


Рис. 24

Подставляя напряжения (в) и граничные условия (г) в уравнения (6.3), получаем еще два уравнения для определения коэффициентов:

$$0 = -\gamma y \cos \beta - (b_3 + \gamma_1)y \operatorname{tg} \beta (-\sin \beta);$$

$$0 = -(b_3 + \gamma_1)y \operatorname{tg} \beta \cos \beta + (a_3 y \operatorname{tg} \beta + b_3 y) (-\sin \beta).$$

Решая их, находим:

$$b_3 = \gamma / \operatorname{tg}^2 \beta - \gamma_1; \quad a_3 = \gamma_1 / \operatorname{tg} \beta - 2\gamma / \operatorname{tg}^3 \beta.$$

Подставляя значения коэффициентов b_3 и a_3 в формулы (в), получаем составляющие напряжений, удовлетворяющие всем граничным условиям и, следовательно, являющиеся решением поставленной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\gamma y; \\ \sigma_y &= (\gamma_1 / \operatorname{tg} \beta - 2\gamma / \operatorname{tg}^3 \beta) x + (\gamma / \operatorname{tg}^2 \beta - \gamma_1) y; \\ \tau_{xy} &= -\gamma x / \operatorname{tg}^2 \beta. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Дадим оценку результатам, получаемым при решении аналогичной задачи методами сопротивления материалов. С точки зрения сопротивления материалов, на подпорную стенку в сечении y_0 действуют две силы (рис. 25): равнодействующая гидростатического давления на вертикальную грань P_1 , вызывающая изгиб, и равнодействующая собственного веса стенки P_2 , приложенная в центре тяжести треугольника и создающая внецентренное сжатие. Оси x^* и z^* — главные центральные оси сечения y_0 . Согласно формулам сопротивления материалов,

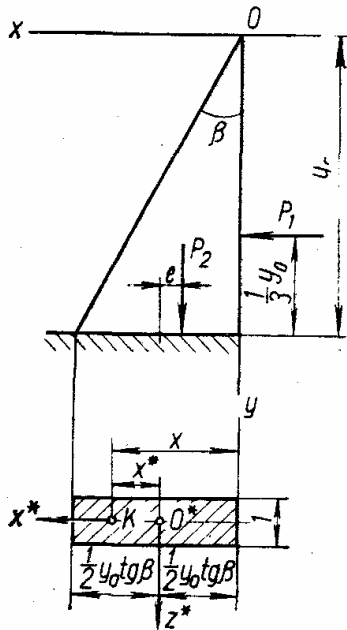


Рис. 25

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= 0; \\ \sigma_y^0 &= N/F + Mx^*/J; \\ \tau_{xy}^0 &= QS^0/(Jb). \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

Здесь продольная сила

$$N = -P_2 = -\gamma_1 y_0^2 \operatorname{tg} \beta / 2,$$

поперечная сила

$$Q = -P_1 = -\gamma y_0^2 / 2,$$

изгибающий момент

$$M = -P_1 y_0 / 3 + P_2 e = -\gamma y_0^3 / 6 + \gamma_1 y_0^2 \operatorname{tg}^2 \beta / 12,$$

где эксцентриситет нагрузки P_2 относительно нейтральной оси сечения z^*

$$e = y_0 \operatorname{tg} \beta / 6,$$

площадь поперечного сечения

$$F = y_0 \operatorname{tg} \beta,$$

момент инерции площади прямоугольного сечения относительно нейтральной оси

$$J = y_0^2 \operatorname{tg}^3 \beta / 12,$$

координата произвольной точки K относительно нейтральной оси

$$x^* = x - y_0 \operatorname{tg} \beta / 2,$$

статический момент относительно нейтральной оси части площади сечения, отсеченной в точке K прямой, параллельной этой оси,

$$S^0 = [y_0^2 \operatorname{tg}^2 \beta / 4 - (x^*)^2] / 2 = (xy_0 \operatorname{tg} \beta - x^2) / 2.$$

После подстановки перечисленных величин в формулы (д) получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= 0; \\ \sigma_y^0 &= \left(\frac{\gamma_1}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) x + \left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} - \gamma_1 \right) y_0; \\ \tau_{xy}^0 &= -\frac{3\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \left(x \operatorname{tg} \beta - \frac{x^2}{y_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

На рис. 26, а показаны эпюры напряжений на горизонтальном уровне $y = y_0$, которые подчиняются формулам (6.27), полученным методами теории упругости. Эпюры построены для $\beta = \pi/6$, $\gamma = 10 \text{ кН/м}^3$ и $\gamma_1 = 20 \text{ кН/м}^3$. На рис. 26, б показаны эпюры тех же напряжений, но полученных методами сопротивления материалов согласно формулам (6.28).

Нормальные напряжения σ_y^0 , подсчитанные по формулам сопротивления материалов, совпадают с напряжениями σ_y , подсчитанными по формулам теории упругости. Напряжениями σ_x^0 в сопротивлении материалов пренебрегают ввиду малости по сравнению с напряжениями σ_y^0 , хотя, как видно из эпюр, их значение, получаемое методами теории упругости, имеет тот же порядок, что и напряжения σ_y .

Касательные напряжения, подсчитанные по формулам теории упругости и сопротивления материалов, отличаются не только количественно, но и качественно. Следовательно, решение рассмотренной задачи методами сопротивления материалов нельзя считать приемлемым.

У верхней грани подпорной стенки появляются растягивающие напряжения σ_y , что нежелательно. С увеличением угла β эти напряже-

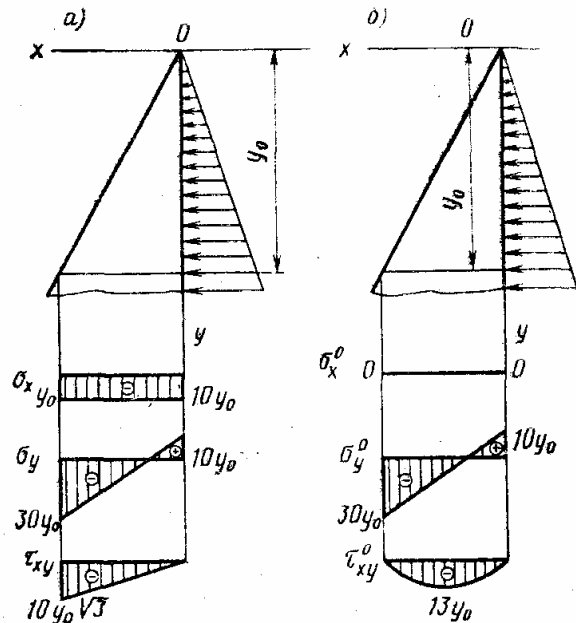


Рис. 26

ния уменьшаются, а затем изменяют знак. Определим значение β , отвечающее нулевым напряжениям. Полагая в формуле (6.27) для σ_y

$$x = 0, y = y_0, \sigma_y = 0,$$

получаем

$$0 = (\gamma/\operatorname{tg}^2 \beta - \gamma_1)y_0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2 \beta = \gamma/\gamma_1.$$

Для принятых ранее γ и γ_1

$$\operatorname{tg}^2 \beta = 0,5; \quad \operatorname{tg} \beta = 0,707; \quad \beta = 35^\circ.$$

Следовательно, чтобы у наклонной грани рассмотренной подпорной стенки не возникали растягивающие напряжения, необходимо иметь угол $\beta \geq 35^\circ$.

§ 8. Расчет балки-стенки

Балкой-стенкой называется конструктивный элемент в виде балки, высота которой соизмерима с длиной перекрываемого пролета. На примере расчета неразрезной балки-стенки можно проиллюстрировать применение к решению плоской задачи тригонометрических рядов. Решение дано Б. Н. Жемочкиным [9].

Такая балка-стенка изображена на рис. 27. Она опирается на ряд колонн, расположенных с одинаковым шагом $2l$, и несет нагрузку, равномерно распределенную по верхней грани. Собственный вес балки-стенки при расчете во внимание не принимается.

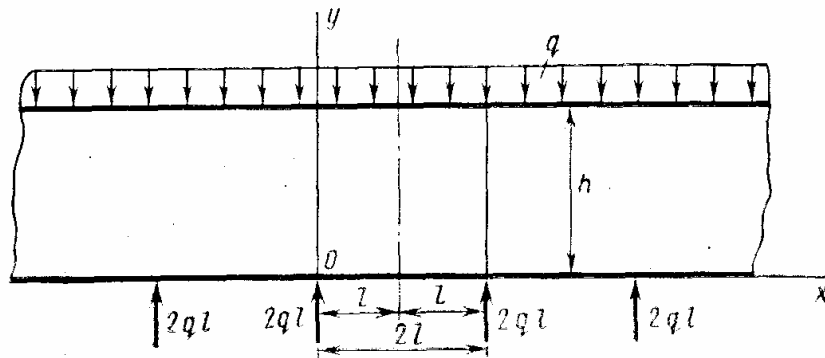


Рис. 27

Пусть балка-стенка имеет бесконечное число пролетов. Если исключить из рассмотрения крайние пролеты, то все остальные будут находиться в одинаковых условиях. В этом случае ось y , проходящая через ось колонны, является осью симметрии. Для выполнения условий симметрии функцию напряжений $\varphi(x, y)$ следует взять четной по отношению к переменной x , т. е. в формуле (6.18) необходимо сохранить только члены, содержащие $\cos \alpha x$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y). \quad (a)$$

Попытки удовлетворить всем граничным условиям поставленной задачи с помощью функций напряжений (а) привели к выводу, что этой функции недостаточно и к ней следует добавить алгебраический полином второй степени. Сохраняя в полиноме только четные члены по отношению к переменной x , получаем видоизмененную функцию напряжений для решения поставленной задачи:

$$\varphi(x, y) = a_2 x^2/2 + c_2 y^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y).$$

Дифференцируя эту функцию согласно формулам (6.10) и учитывая, что объемные силы равны нулю, находим составляющие напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cos \alpha x [A_n \alpha \operatorname{ch} \alpha y + B_n (2 \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) + C_n \alpha \operatorname{sh} \alpha y + D_n (2 \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y)]; \\ \sigma_y &= a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y); \\ \tau_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x [A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha y + B_n (\operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y) + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha y + D_n (\operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y)], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где по-прежнему $\alpha = n\pi/l$.

Полученные формулы пригодны для всех пролетов рассматриваемой балки-стенки, так как от прибавления к абсциссе x длины $2l$ функция косинуса не меняется. Следовательно, в соответствующих точках всех пролетов возникают одинаковые напряжения.

Для определения постоянных, входящих в формулы (6), рассмотрим граничные условия. Два условия можно записать для верхней грани. Так как эта грань несет нормальную сжимающую нагрузку интенсивностью q , то

$$\text{при } y = h \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (в)$$

Нижняя грань свободна от нагрузки во всех точках, кроме тех, которые лежат на осях колонн. В них приложены опорные реакции, рассматриваемые как сосредоточенные силы.

Итак, имеем еще два условия:

$$\text{при } y = 0 \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (г)$$

Для включения в граничные условия опорных реакций на нижней грани рассмотрим равновесие части балки в пределах одного пролета, отсеченной горизонтальной плоскостью на произвольной высоте y

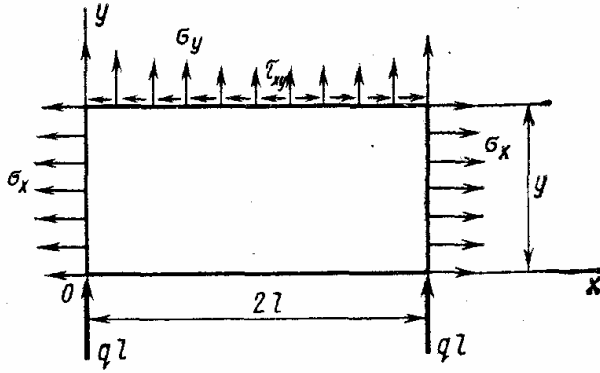


Рис. 28

(рис. 28). Из суммы проекций на ось y всех сил, действующих на выделенную часть балки, следует пятое условие:

$$\int_0^{2l} \sigma_y dx = -2ql. \quad (д)$$

Наконец, шестое условие получаем из рассмотрения вертикальных сечений балки. По характеру внешних нагрузок усилия в них сводятся к изгибающему моменту и поперечной силе. Поскольку продольная сила отсутствует, сумма проекций всех сил на ось x равна нулю:

$$\int_0^h \sigma_x dy = 0. \quad (е)$$

Подставляя в условия (в)—(е) составляющие напряжений (б), после интегрирования и приведения подобных членов получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha h + B_n h \operatorname{ch} \alpha h + C_n \operatorname{sh} \alpha h + \\ + D_n h \operatorname{sh} \alpha h) = -q; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x [A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha h + B_n (\operatorname{ch} \alpha h + \alpha h \operatorname{sh} \alpha h) + \\ + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha h + D_n (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h \operatorname{ch} \alpha h)] = 0; \\ a_2 - \sum_{h=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (A_n) = 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x (B_n + C_n \alpha) = 0; \\ a_2 \cdot 2l = -2ql; \\ c_2 h + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x [A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha h + B_n (\operatorname{ch} \alpha h + \alpha h \operatorname{sh} \alpha h - 1) + \\ + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha h + 1 + D_n (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h \operatorname{ch} \alpha h)] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Из пятого уравнения (ж) находим $a_2 = -q$. С учетом этого результата первое уравнение принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha h + B_n h \operatorname{ch} \alpha h + C_n \operatorname{sh} \alpha h + D_n h \operatorname{sh} \alpha h) = 0.$$

Для того, чтобы суммы членов ряда, не зависящих друг от друга равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы каждый член ряда равнялся нулю. Поэтому

$$A_n \operatorname{ch} \alpha h + B_n h \operatorname{ch} \alpha h + C_n \operatorname{sh} \alpha h + D_n h \operatorname{sh} \alpha h = 0. \quad (з)$$

Аналогично из второго уравнения (ж) получаем

$$A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha h + B_n (\operatorname{ch} \alpha h + \alpha h \operatorname{sh} \alpha h) + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha h + D_n (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h \operatorname{ch} \alpha h) = 0, \quad (и)$$

а из четвертого —

$$B_n + C_n \alpha = 0. \quad (к)$$

Согласно формулам (и) и (к), выражение, стоящее в фигурных скобках шестого уравнения (ж), равно нулю и, следовательно,

$$c_2 = 0.$$

Третье из уравнений (ж) после подстановки значения a_2 принимает такой вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha^2 \cos \alpha x = -q. \quad (л)$$

Для его решения нагрузку q разложим в ряд Фурье, используя известную из математики формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\psi = -1/2,$$

которая действительна при $0 < \psi < 2\pi$. Таким образом,

$$q = - \sum_{n=1}^{\infty} 2q \cos \alpha x.$$

Подставляем этот ряд в формулу (л):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha^2 \cos \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} 2q \cos \alpha x,$$

откуда находим $A_n = 2q/\alpha^2$.

После этого, решая совместно систему уравнений (з)—(к), находим остальные постоянные:

$$B_n = \frac{2q}{\alpha} \frac{\operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha h + \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2};$$

$$C_n = - \frac{2q}{\alpha^2} \frac{\operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha h + \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2};$$

$$D_n = - \frac{2q}{\alpha} \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}.$$

Учитывая, что дроби $\frac{\text{sh } \alpha h \text{ ch } \alpha h + \alpha h}{\text{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}$ и $\frac{\text{sh}^2 \alpha h}{\text{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}$ для высоких балок-стенок при высоте h , имеющей порядок $2l$, близки к единице, получаем:

$$B_n = 2q/\alpha; \quad C_n = -2q/\alpha^2; \quad D_n = -2q/\alpha.$$

Подставляя значения найденных постоянных в формулы (б), находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2q \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha y - 1) e^{-\alpha y} \cos \alpha x; \\ \sigma_y &= -q - 2q \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha y + 1) e^{-\alpha y} \cos \alpha x; \\ \tau_{xy} &= -2q \sum_{n=1}^{\infty} \alpha y e^{-\alpha y} \sin \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (м)$$

Здесь гиперболические функции заменены экспоненциальными согласно зависимости

$$\text{ch } \alpha y - \text{sh } \alpha y = e^{-\alpha y}.$$

Ряды в формулах (м) сходятся очень быстро во всех точках, за исключением тех, которые находятся вблизи нижнего края (при малых значениях y).

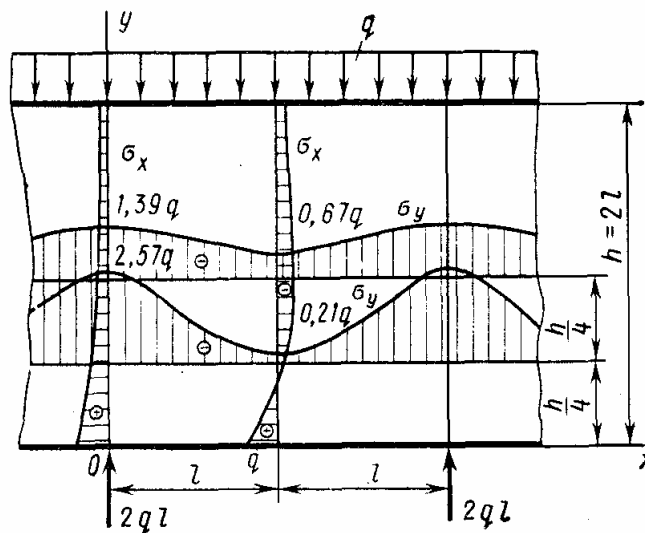


Рис. 29

Результаты вычислений для балки-стенки высотой $h = 2l$ приведены на рис. 29 в виде эпюр нормальных напряжений σ_x для двух вертикальных сечений (на опоре и посередине пролета) и нормальных напряжений σ_y для двух горизонтальных сечений. Нетрудно убедиться, что эти эпюры заметно отличаются от эпюр, получаемых в сопротивлении материалов.

§ 9. Обоснование принципа Сен-Венана

Принцип Сен-Венана сформулирован в § 1 гл. I. Он использован при рассмотрении граничных условий в задаче об изгибе консоли (см. § 6 настоящей главы). В расчете балки на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки этот принцип применен для смягчения граничных условий (см. § 6). Последняя задача позволяет дать количественную оценку принципу Сен-Венана. Из формул (6.25) следует, что на торцах рассмотренной балки, т. е. при $x = \pm l$ (см. рис. 22), возникают нормальные напряжения

$$\sigma_x^T = (6q/h) [2y^2/(3h^2) - 0,1]y.$$

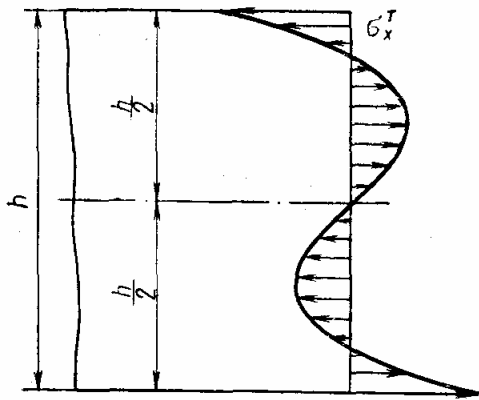


Рис. 30

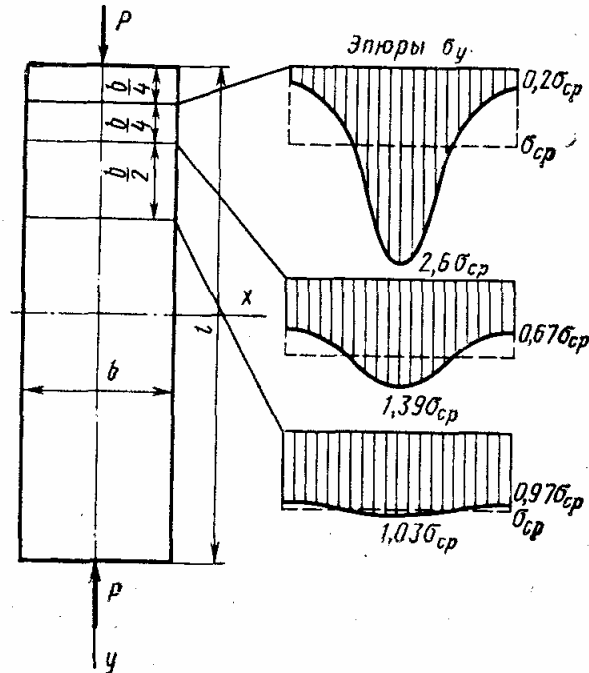


Рис. 31

Эпюра этих напряжений на правом торце показана на рис. 30. Максимальное значение достигается при $y = h/2$:

$$\max \sigma_x^T = q/5.$$

Влияние подсчитанных напряжений на напряжения $\max \sigma_x$ в различных поперечных сечениях балки иллюстрирует табл. 1. Из нее видно, что это влияние по мере удаления от торца очень быстро угасает. Так, в сечении на расстоянии от торца, равном высоте балки, напряжения σ_x^T составляют лишь 0,74% от действующих в этом сечении максимальных напряжений σ_x .

Кроме указанных примеров для обоснования принципа Сен-Венана можно привести еще решение для узкой прямоугольной пластинки, сжимаемой по коротким сторонам силами P . На рис. 31 показаны эпюры напряжений σ_y в трех поперечных сечениях. Сечения взяты на расстояниях от нагруженного конца, равных $b/4$, $b/2$ и b . Числа на эпюрах обозначают значения напряжений в долях от среднего напряжения $\sigma_{cp} = P/b \cdot 1$. Из рисунка видно, что по мере удаления от точки приложения силы эпюры быстро выравниваются и на расстоянии, рав-

Таблица 1

Сечение	$x=4,95 h$	$x=4,75 h$	$x=4,5 h$	$x=4 h$
$(\max \sigma_x^T / \max \sigma_x) \cdot 100\%$	11,8	2,66	1,38	0,74

ном ширине пластинки, распределение напряжений становится практически равномерным.

Сен-Венан сформулировал свой принцип для призмы сплошного сечения, нагруженной сжимающими силами по концам. В дальнейшем этот принцип был распространен на сплошное тело, в малой части которого действует нагрузка, прикладываемая различными способами.

В тонкостенных стержнях и оболочках принцип Сен-Венана следует применять весьма осторожно, а именно только в том случае, когда область приложения нагрузки имеет порядок, соизмеримый с толщиной элементов сечения.

ГЛАВА VII

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 1. Основные уравнения

При решении плоской задачи встречаются тела, ограниченные поверхностями кругового цилиндра и радиально расходящимися плоскостями. В этих случаях переход от декартовой системы координат к полярной значительно упрощает решение.

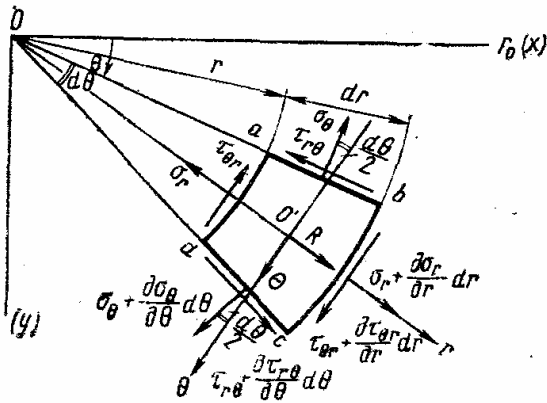


Рис. 32

В полярной системе координат положение любой точки на плоскости определяется двумя величинами: радиус-вектором r и полярным углом θ , отсчитываемым от начального радиус-вектора r_0 . Рассмотрим основные уравнения плоской задачи в полярных координатах: дифференциальные уравнения равновесия, уравнение неразрывности деформаций, формулы Коши и формулы обобщенного закона Гука.

Вырежем из пластинки толщиной, равной единице, элемент $abcd$ (рис. 32). Для этого проведем радиус Oab под произвольным углом θ к начальному радиус-вектору, затем дадим углу бесконечно малое приращение $d\theta$ и проведем радиус Odc . Произвольным радиусом $Oa = r$ проведем дугу ad , затем дадим радиусу r приращение $ab = dr$ и прове-

дем вторую дугу — bc . Стороны полученного элемента имеют следующие размеры:

$$ab = cd = dr, \quad ad = rd\theta, \quad bc = (r + dr)d\theta.$$

На границах элемента действуют следующие составляющие напряжений: σ_r — радиальное нормальное напряжение; σ_θ — тангенциальное нормальное напряжение; $\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}$ — касательные напряжения; R и Θ — составляющие объемной силы.

Составим уравнения проекций всех сил на оси r и θ :

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \sin \frac{d\theta}{2} - \\ & - \sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{r\theta} dr \cos \frac{d\theta}{2} + \\ & + R dr \cdot rd\theta = 0; \\ & \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cos \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \cos \frac{d\theta}{2} + \\ & + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \tau_{\theta r} r d\theta + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \sin \frac{d\theta}{2} + \\ & + \tau_{r\theta} dr \sin \frac{d\theta}{2} + \Theta dr \cdot rd\theta = 0. \end{aligned}$$

При упрощении учтем, что ввиду малости угла $d\theta$ можно принять

$$\sin(d\theta/2) = d\theta/2; \quad \cos(d\theta/2) = 1.$$

Тогда, отбрасывая величины третьего порядка малости и деля оба уравнения на площадь элемента $dr \cdot rd\theta$, получаем дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи в полярной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Особенностью этих уравнений по сравнению с условиями равновесия (6.2) для плоской задачи в декартовых координатах является наличие в знаменателе величины r . Чем ближе к началу координат (полюсу) расположена рассматриваемая точка, тем быстрее будут возрастать слагаемые, содержащие множитель $1/r$, так как r неограниченно убывает. Поэтому уравнения (7.1) неприемлемы для точек, лежащих вблизи полюса.

Преобразуем к полярным координатам уравнение неразрывности деформаций. В декартовых координатах оно записывалось в виде (6.9)

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (a)$$

Сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам в плоской задаче является инвариантом. Действительно, подставляя в первый инвариант напряженного состояния (1.12) $\sigma_z = 0$, получим, что при обобщенном плоском напряженном состоянии инвариантной величиной является

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y.$$

При плоской деформации согласно формуле (6.1) напряжение

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

и инвариантной величиной является

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \nu (\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \nu) (\sigma_x + \sigma_y).$$

Таким образом, в плоской задаче в каждой точке сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная, и можно составить следующее тождество:

$$\sigma_x + \sigma_y \equiv \sigma_r + \sigma_\theta.$$

Заменяя с его помощью напряжения в формуле (а), получаем уравнение неразрывности деформаций для плоской задачи в полярной системе координат:

$$\nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (6)$$

Однако оператор Лапласа в полярной системе имеет иной вид, чем в декартовой. Заменим в формуле (6.9) декартовы координаты на полярные. Для этого на рис. 32 ось x совместим с начальным радиус-вектором r_0 , а ось y направим вниз. В этом случае полярные координаты связаны с декартовыми следующими зависимостями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \theta = \arctg(y/x). \quad (7.2)$$

Дифференцируя эти зависимости по x и y и учитывая, что $x/r = \cos \theta$, $y/r = \sin \theta$, находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}; \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Вычисляем первые производные по x и y произвольной функции $\psi(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Используя выражения (в), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{г})$$

Аналогично вычисляем вторые производные той же функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \right. \\ &\left. - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \frac{\sin \theta}{r} = \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \sin^2 \theta + \\ &\quad + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \sin 2\theta; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) \frac{\cos \theta}{r} = \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \cos^2 \theta - \\ &\quad - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (\text{д})$$

Совместим ось x с радиус-вектором r . В этом случае $\theta = 0$ и производные в декартовой системе координат (г) и (д) выразятся через производные в полярной системе следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{е})$$

Тогда оператор Лапласа принимает вид

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}. \quad (\text{ж})$$

Используя это выражение в уравнении (б), получим развернутое уравнение неразрывности деформаций для плоской задачи в полярной системе координат:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (7.3)$$

Выразим теперь в этой системе геометрические соотношения Коши. Обозначим составляющую перемещения вдоль оси r через u , а вдоль оси θ — через v .

На рис. 33 изображен элемент $abcd$ до деформирования и положение точек a_1 , b_1 и d_1 после деформирования.

Относительное удлинение в направлении r за счет перемещения u находим аналогично тому, как это сделано в декартовой системе координат (см. § 1 гл. II):

$$\epsilon_r = \frac{\left[dr + \left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr \right) - u \right] - dr}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (3)$$

Относительное удлинение вдоль оси θ зависит как от составляющей перемещения u , так и от составляющей v . В первом случае

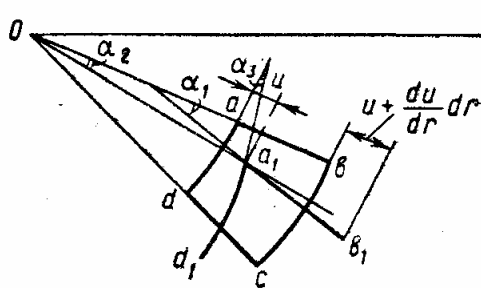


Рис. 33

$$\frac{(r+u) d\theta - r d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r};$$

во втором, по аналогии с формулой (3),

$$\frac{\partial v}{s} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Здесь элемент дуги ds заменен на произведение $r d\theta$. Суммарное удлинение

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (и)$$

Угловая деформация в рассматриваемой плоскости

$$\gamma_{r\theta} = (\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_3 = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (к)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial r}; \quad \alpha_2 = \frac{v}{r}; \quad \alpha_3 = \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Таким образом, геометрические соотношения Коши в полярной системе координат образуют систему уравнений (з), (и), (к):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Формулы закона Гука для обобщенного плоского напряженного состояния в полярных координатах сохраняют такой же вид, как и

в декартовой системе [см. соотношения (6.8)], при замене индексов x и y на r и θ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= (\sigma_{\theta} - \nu\sigma_r)/E; \\ \varepsilon_r &= (\sigma_r - \nu\sigma_{\theta})/E; \\ \gamma_{\theta r} &= 2(1 + \nu)\tau_{\theta r}/E. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

В случае плоской деформации упругие постоянные E и ν в формулах (7.5) должны быть заменены соответственно на упругие постоянные E_1 и ν_1 согласно формулам (6.6).

§ 2. Простое радиальное напряженное состояние

Для решения плоской задачи в напряжениях в полярной системе координат имеем два уравнения равновесия (7.1) и уравнение неразрывности деформаций (7.3). Однако часто приходится иметь дело с напряженным состоянием, при котором во всех точках тела действуют только радиальные нормальные напряжения σ_r . Остальные составляющие напряжений, как и составляющие объемных сил, равны нулю. Такое напряженное состояние называется *простым радиальным*.

В этом случае одно уравнение равновесия обращается в тождество, а другое уравнение и уравнение неразрывности деформаций значительно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Систему уравнений (a) можно проинтегрировать в общем виде методом Фурье. Для этого представим напряжение σ_r , являющееся функцией двух переменных r и θ , в виде произведения двух функций:

$$\sigma_r(r, \theta) = \varphi(r)\psi(\theta), \quad (б)$$

первая из которых является функцией только одной переменной r , а вторая — только переменной θ .

Подставляя функцию (б) в уравнения (a), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения с двумя неизвестными функциями φ и ψ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi'\psi + \varphi\psi/r &= 0; \\ \varphi''\psi + \varphi'\psi/r + \varphi\psi''/r^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Первое уравнение (в) после деления на ψ дает

$$\varphi' + \varphi/r = 0,$$

откуда после разделения переменных

$$\varphi'/\varphi = -1/r.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln \varphi = -\ln r + \ln C,$$

или

$$\ln \varphi = \ln (C/r).$$

Потенцируя, находим функцию

$$\varphi = C/r. \quad (\text{г})$$

Для отыскания функции ψ подставим найденную функцию φ во второе уравнение (в):

$$(2C/r^3)\psi + (-C/r^2)\psi/r + (C/r)\psi''/r^2 = 0.$$

После деления на дробь C/r^3 получаем дифференциальное уравнение

$$\psi'' + \psi = 0.$$

Его решение представляется в виде

$$\psi = A \cos \theta + B \sin \theta. \quad (\text{д})$$

Подставляя решения (г) и (д) в выражение (б), находим

$$\sigma_r = C (A \cos \theta + B \sin \theta)/r. \quad (\text{е})$$

Для удобства дальнейших выкладок введем новые произвольные постоянные k и θ_0 :

$$C \cdot A = -k \cos \theta_0; \quad C \cdot B = -k \sin \theta_0.$$

Тогда функция (е) примет вид

$$\sigma_r = (-k/r) (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0), \quad (7.6)$$

или, если применить тригонометрическую формулу преобразования косинуса разности двух углов,

$$\sigma_r = (-k/r) \cos (\theta - \theta_0).$$

Следовательно, простое радиальное напряженное состояние представляется следующими напряжениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (-k/r) \cos (\theta - \theta_0); \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Постоянные k и θ_0 определяются из граничных условий.

§ 3. Клинь, нагруженный в вершине сосредоточенной силой

Решение (7.7) можно применить к задаче о клине, в вершине которого приложена сила P произвольного направления (рис. 34). Угол раствора клина равен 2α . Начальный радиус-вектор r_0 совпадает с биссектрисой угла. Линия действия силы составляет с начальным радиус-вектором угол β . Покажем, что в этом случае клин находится в простом радиальном напряженном состоянии. Для этого воспользуемся выражением напряжения σ_r в форме (7.6):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (-k/r) (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0); \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

и определим постоянные k и θ_0 , при которых удовлетворяются граничные условия поставленной задачи.

Исключим из рассмотрения закрепление нижней кромки клина, которое оказывает влияние на распределение напряжений только вблизи от места закрепления.

На боковых поверхностях клина, т. е. при $\theta = \pm\alpha$, $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$. Из формул (7.8) следует, что это условие тождественно выполняется во всех точках боковой поверхности, кроме полюса O . В полюсе при

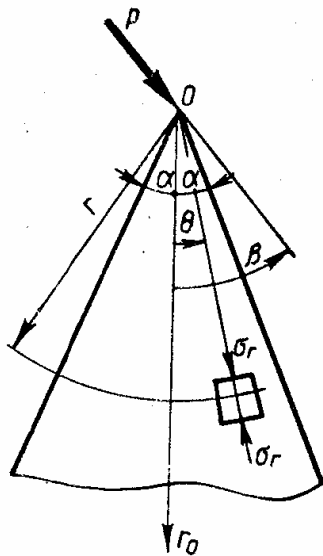


Рис. 34

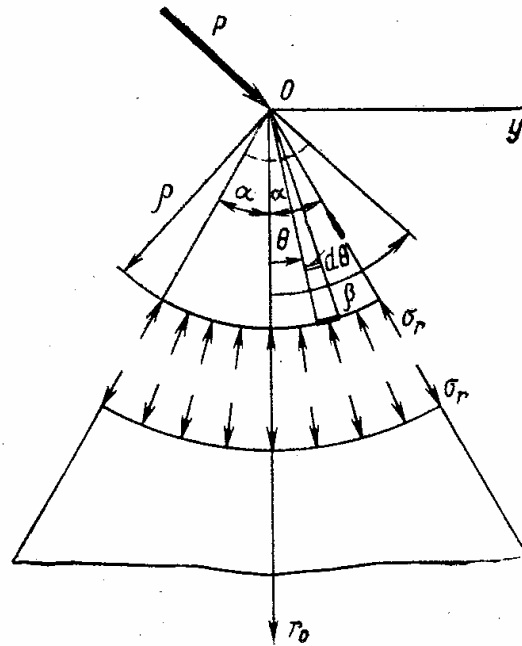


Рис. 35

$r = 0$ указанные формулы неприемлемы. Для включения в граничные условия силы P заменим ее на основании принципа Сен-Венана эквивалентной нагрузкой, распределенной по дуге малого радиуса ρ (рис. 35).

Рассмотрим равновесие элемента клина, отсекаемого дугой произвольного радиуса ρ . Спроецируем все силы, приложенные к этому элементу, на вертикальную и горизонтальную оси. Принимая толщину клина в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, равной единице, получим:

$$-\int_{-\beta}^{+\alpha} \sigma_r \rho d\theta \cos \theta + P \cos \beta = 0;$$

$$-\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r \rho d\theta \sin \theta + P \sin \beta = 0.$$

После подстановки напряжения σ , из формул (7.8) при $r = \rho$ эти условия равновесия преобразуются в следующие:

$$\left. \begin{aligned} k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta + k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta + P \cos \beta = 0; \\ k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta + k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta + P \sin \beta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Интегрируя, получаем систему двух уравнений для определения постоянных k и θ_0 :

$$\begin{aligned} k \cos \theta_0 (\alpha + 0,5 \sin 2\alpha) + P \cos \beta = 0; \\ k \sin \theta_0 (\alpha - 0,5 \sin 2\alpha) + P \sin \beta = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} k \cos \theta_0 &= -\frac{2P \cos \beta}{2\alpha + \sin 2\alpha}; \\ k \sin \theta_0 &= -\frac{2P \sin \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Разделив почленно второе уравнение (б) на первое, получаем условие для определения постоянной θ_0 :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} \beta \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}. \quad (7.9)$$

Возведем оба уравнения (б) в квадрат и сложим:

$$\begin{aligned} k^2 (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) &= 4P^2 \cos^2 \beta / (2\alpha + \sin 2\alpha)^2 + \\ &+ 4P^2 \sin^2 \beta / (2\alpha - \sin 2\alpha)^2. \end{aligned}$$

Извлекая корень, находим

$$k = 2P \sqrt{\cos^2 \beta / (2\alpha + \sin 2\alpha)^2 + \sin^2 \beta / (2\alpha - \sin 2\alpha)^2}. \quad (7.10)$$

Таким образом, удалось удовлетворить граничным условиям и, следовательно, рассматриваемый клин находится в простом радиальном напряженном состоянии. При этом постоянные k и θ_0 определяются формулами (7.9) и (7.10).

§ 4. Сжатие клина

Задачу о сжатии клина сосредоточенной силой, приложенной к его вершине (рис. 36), можно рассматривать как частный случай задачи, разобранный в § 3, когда $\beta = 0$. При этом постоянные θ_0 и k согласно формулам (7.9) и (7.10) принимают следующие значения:

$$\theta_0 = 0, \quad k = \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha}. \quad (7.11)$$

Внося эти значения в формулы (7.8), получаем такие составляющие напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \theta}{r}; \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Эпюра радиальных напряжений σ_r в сечении $r = \text{const}$ показана на том же рисунке.

Для исследования напряженного состояния в сжатом клине удобно перейти к его поперечным и продольным сечениям. Если ось x совместить с осью симметрии клина, а ось y направить вправо, то в поперечном сечении будут действовать составляющие напряжений σ_x и τ_{yx} , а в продольном — σ_y и τ_{xy} .

Связь между составляющими напряжений в декартовой и полярной системах координат для плоской задачи получим из формул (1.7) и (1.10), изменяя в них обозначения соответствующих направлений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r l^2 + \sigma_\theta m^2 + 2\tau_{r\theta} lm; \\ \sigma_y &= \sigma_r l_1^2 + \sigma_\theta m_1^2 + 2\tau_{r\theta} l_1 m_1; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \sigma_r ll_1 + \sigma_\theta mm_1 + \tau_{r\theta} (lm_1 + l_1 m). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

В этих формулах направляющие косинусы l и m определяют положение оси x по отношению соответственно к осям r и θ :

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos(r, x) = \cos \theta; \\ m &= \cos(\theta, x) = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

а направляющие косинусы l_1 и m_1 — положение оси y :

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos(r, y) = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta; \\ m_1 &= \cos(\theta, y) = \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

После подстановки направляющих косинусов (б) и (в) в формулы (а) получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Пользуясь значениями напряжений (7.13), находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos^3 \theta}{r}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

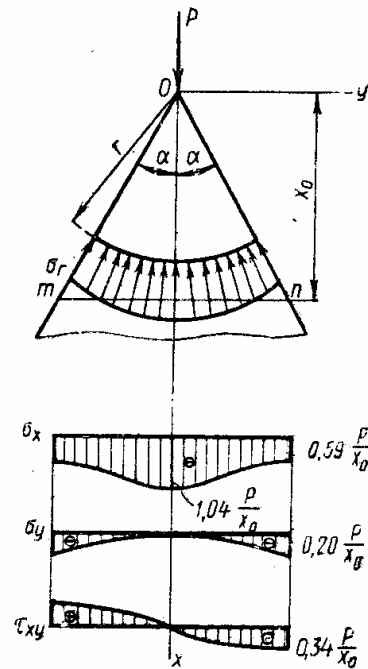


Рис. 36

Перейдем в правой части полученных равенств от полярных координат к декартовым, связь между которыми выражается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos \theta &= x/r = x/\sqrt{x^2 + y^2}; \\ \sin \theta &= y/r = y/\sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

Подставляя эти соотношения в формулы (г), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Исследуем выведенные формулы на примере клина с углом $\alpha = \pi/6$ рад. В сечении mn , находящемся на расстоянии x_0 от вершины,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{0,957} \frac{x_0^3}{(x_0^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{P}{0,957} \frac{x_0 y^2}{(x_0^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{0,957} \frac{x_0^2 y}{(x_0^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

Эпюры этих напряжений изображены на рис. 36.

Для сравнения приведем решение с позиций сопротивления материалов, где принимают, что при сжатии нормальные напряжения в поперечном сечении σ_x^0 распределены равномерно, а напряжения σ_y^0 и τ_{xy}^0 отсутствуют:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= -P/F_{mn} = -P/(2x_0 \operatorname{tg} \alpha) = -0,866P/x_0; \\ \sigma_y^0 &= \tau_{xy}^0 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Сопоставляя эти напряжения с напряжениями (д), заключаем, что нормальное напряжение σ_x^0 , получаемое методами сопротивления материалов, отличается от максимального нормального напряжения σ_x , получаемого методами теории упругости, на 17%. В случае, когда угол $\alpha = \pi/4$ рад, эта разница достигает 36%. Отсюда следует, что методика сопротивления материалов непригодна для расчета сжатых стержней переменного сечения с большим углом раствора α .

§ 5. Изгиб клина

Задачу об изгибе клина силой, приложенной к его вершине (рис. 37), можно также рассматривать как частный случай задачи, разобранный в § 3, при $\beta = \pi/2$. Придерживаясь той же последователь-

ности, что и в предыдущем параграфе, находим значения постоянных:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$k = \frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

и составляющих напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \theta}{r}; \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Эпюра радиальных напряжений σ_r в сечении $r = \text{const}$ показана на указанном рисунке.

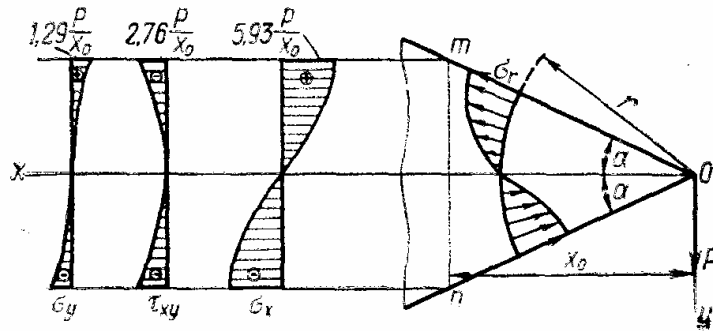


Рис. 37

Переходя с помощью формул (7.14) и (7.15) к декартовой системе координат, находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Исследуем распределение напряжений в клине с углом $\alpha = \pi/7,2 = 0,436$ рад. В этом случае в поперечном сечении, отстоящем от вершины на расстоянии x_0 , возникнут следующие напряжения:

$$\sigma_x = -\frac{P}{0.0533} \frac{x_0^2 y}{(x_0^2 + y^2)^2};$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{0.0533} \frac{y^3}{(x_0^2 + y^2)^2};$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{0.0533} \frac{x_0 y^2}{(x_0^2 + y^2)^2}.$$

Их эпюры также показаны на рис. 37.

Для сравнения приведем решение, получаемое методами сопротивления материалов:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= \frac{My}{J_z} = \frac{-Px_0 y}{1 \cdot (2x_0 \operatorname{tg} \alpha)^3 / 12} = -\frac{3}{2} \frac{Py}{x_0^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}; \\ \sigma_y^0 &= 0; \\ \tau_{xy}^0 &= \frac{QS_z^0}{J_z b} = \frac{P(x_0^2 \operatorname{tg}^3 \alpha - y^2) / 2}{[1 \cdot (2x_0 \operatorname{tg} \alpha)^3 / 12] \cdot 1} = \frac{3}{4} \frac{P(x_0^2 \operatorname{tg}^3 \alpha - y^2)}{x_0^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}. \end{aligned} \right\} (7.18)$$

Эпюры этих напряжений при том же значении угла α представлены на рис. 38.

Сравнивая соответствующие эпюры на рис. 37 и 38, замечаем, что они значительно отличаются друг от друга. Эпюра нормальных напряжений σ_x , построенная по формулам (7.17), криволинейная, а эпюра напряжений σ_x^0 , построенная по формулам (7.18), прямолинейная, причем максимальные значения напряжений отличаются на 17%. С увеличением угла α эта разница возрастает.

Эпюры касательных напряжений τ_{xy}^0 и τ_{xy} вообще не имеют ничего общего. Нормальные напряжения σ_y^0 по всему сечению равны нулю,

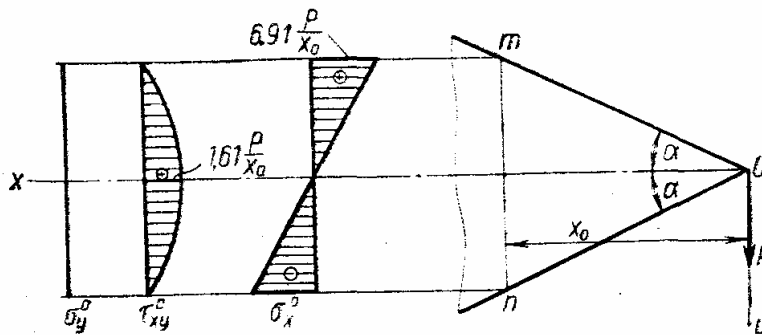


Рис. 38

а максимальное значение нормального напряжения σ_y для исследуемого угла α составляет около 22% от максимального значения нормального напряжения σ_x .

С уменьшением угла α расхождение между решениями теории упругости и сопротивления материалов также уменьшается. Следовательно, методика сопротивления материалов пригодна лишь для малых углов.

§ 6. Действие сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости

На рис. 39 изображена упругая среда, ограниченная плоскостью AB и простирающаяся неограниченно вниз. В точке O приложена сила P , перпендикулярная плоскости AB . В случаях плоской задачи рассматриваемая среда называется *упругой полуплоскостью*. Таких случаев может представиться два. Если протяженность среды в направле-

нии, перпендикулярном плоскости чертежа, весьма мала, то возникает сжатое плоское напряженное состояние. Если же протяженность среды в указанном направлении велика, то имеем дело с плоской деформацией и в этом случае сила P представляет собой нагрузку, равномерно распределенную вдоль прямой, перпендикулярной плоскости чертежа.

Полуплоскость можно рассматривать как разновидность клина при угле раствора $2\alpha = \pi$. Полагая также $\beta = 0$, так как сила P направлена вдоль оси x , из формул (7.11) получаем постоянные $\theta_0 = 0$, $k = 2P/\pi$.

Подставляя эти значения в формулы (7.12), находим напряжения в точках упругой полуплоскости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -2P \cos \theta / (\pi r); \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Французским ученым Ж. Буссинеском предложено следующее графическое представление напряженного состояния внутри полуплоскости: если провести окружность, касающуюся границы полуплоскости в точке приложения нагрузки P , то эта окружность будет представлять собой геометрическое место точек с одинаковыми радиальными напряжениями σ_r (круг Буссинеска). Докажем это положение.

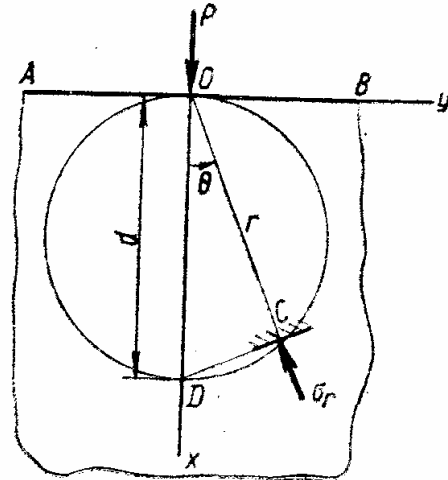


Рис. 39

На рис. 39 окружность диаметром OD , равным d , касается границы полуплоскости AOB в точке O . Радиус-вектор, проведенный в произвольную точку C , равен r . Из тригонометрических соотношений в прямоугольном треугольнике OCD следует, что $r = d \cos \theta$, откуда $\cos \theta / r = 1/d$. Используя это соотношение в первой формуле (7.19), получаем

$$\sigma_r = -2P / (\pi d). \quad (7.20)$$

Таким образом, во всех точках указанной окружности радиальные напряжения σ_r одинаковы.

Формулы (7.19) можно применять для определения напряжений в основании фундамента. Хотя грунт основания чаще всего не обладает упругими свойствами, при небольших внешних давлениях практически для всех грунтов можно принимать линейную зависимость между деформациями и напряжениями и использовать уравнения теории упругости.

В инженерной практике при расчете фундаментов необходимо знать распределение напряжений в толще грунта по горизонтальному и вертикальному сечениям, поэтому в рассмотренной задаче перейдем от напряжений в полярной системе координат к напряжениям в декарто-

вой системе. Подставляя значения напряжений (7.19) в формулы (7.13), получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -[2P/(\pi r)] \cos^3 \theta; \\ \sigma_y &= -[2P/(\pi r)] \cos \theta \sin^2 \theta; \\ \tau_{xy} &= -[2P/(\pi r)] \cos^2 \theta \sin \theta,\end{aligned}$$

или, используя формулы перехода (7.14) от одной системы координат к другой,

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

Эпюры нормальных σ_x и касательных τ_{xy} напряжений для двух горизонтальных сечений показаны на рис. 40, а, б. На рис. 40, в изображены эпюры нормальных напряжений σ_y для двух вертикальных сечений.

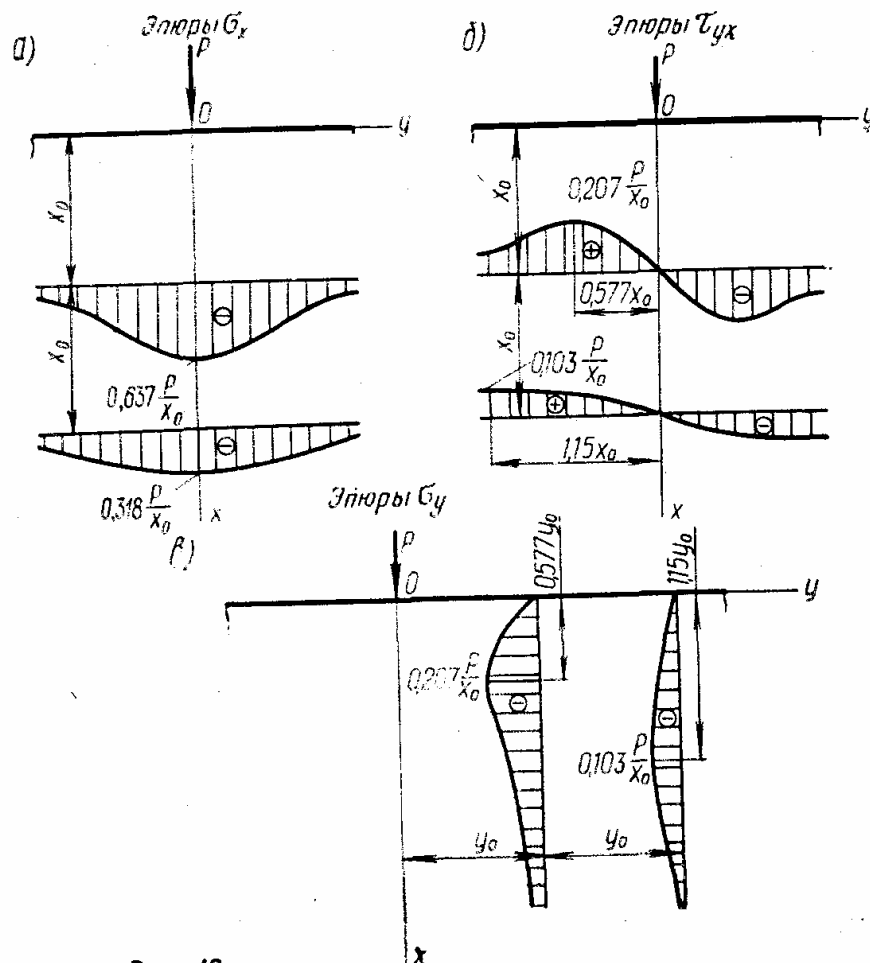


Рис. 40

Нормальные напряжения σ_x , действующие в горизонтальных сечениях, достигают максимума под силой P и затухают при удалении от линии ее действия как в ширину, так и в глубину.

Касательные напряжения τ_{xy} под силой равны нулю, на некотором расстоянии от линии ее действия достигают максимума, а затем постепенно затухают. По мере углубления максимум смещается все дальше от оси x . Так же как τ_{xy} , ведут себя и нормальные напряжения σ_y , достигающие максимального значения на том же расстоянии, но по глубине.

Решение для сосредоточенной силы можно распространить на случай любой сплошной распределенной нагрузки (рис. 41). Если интенсивность нагрузки в данной точке равна q , то равнодействующая нагрузки на бесконечно малой длине dy составляет qdy . Размер dy в полярной системе координат имеет вид

$$dy = -\frac{rd\theta}{\cos \theta}$$

Здесь знак минус появляется потому, что при возрастании y угол θ убывает. Тогда элементарную нагрузку на участке dy можно представить как

$$dP = qdy = -\frac{qrd\theta}{\cos \theta}.$$

Внося это значение в формулы (7.19), получаем напряжения в точке M от бесконечно малой силы dP , приложенной в произвольной точке на границе полуплоскости:

$$d\sigma_r = (2q/\pi)d\theta; \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0.$$

С помощью формул (7.13) переходим к напряжениям, возникающим от бесконечно малой силы dP на горизонтальных и вертикальных площадках, проходящих через ту же точку M :

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= (2q/\pi) \cos^2 \theta d\theta; \\ d\sigma_y &= (2q/\pi) \sin^2 \theta d\theta; \\ d\tau_{xy} &= (2q/\pi) \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Если нагрузка q распределена вдоль оси y от точки A до точки B и угол θ изменяется в этих границах от θ_1 до θ_2 , то, суммируя напряжения

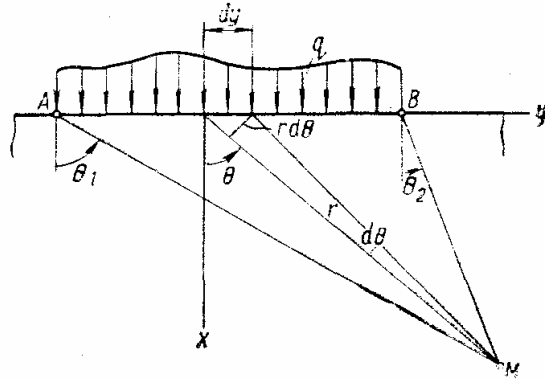


Рис. 41

от каждой элементарной силы dP , получаем напряжения в точке M от всей распределенной нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \cos^2 \theta d\theta; \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \sin^2 \theta d\theta; \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned} \right\} (7.22)$$

Чтобы проинтегрировать выражения (7.22), нагрузку q необходимо представить в виде функции угла θ . В случае равномерно распределенной нагрузки интегрирование значительно облегчается, так как $q = \text{const}$. В результате получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= q [2(\theta_2 - \theta_1) + \sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1] / (2\pi); \\ \sigma_y &= q [2(\theta_2 - \theta_1) - \sin 2\theta_2 + \sin 2\theta_1] / (2\pi); \\ \tau_{xy} &= q (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) / \pi. \end{aligned} \right\} (7.23)$$

§ 7. Функция напряжений для плоской задачи в полярных координатах

Решение плоской задачи в полярных координатах в напряжениях заключается в отыскании трех функций $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$ и $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ с помощью трех уравнений: двух уравнений равновесия (7.1) и уравнения неразрывности деформаций (7.3) при обязательном удовлетворении условий на поверхности.

Аналогично тому, как было сделано при решении плоской задачи в декартовых координатах (см. § 3, гл. VI), решение в полярных координатах можно свести к отысканию одной функции напряжений $\varphi(r, \theta)$. Выберем эту функцию так, чтобы напряжения выражались через нее следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} (7.24)$$

Подставляя эти выражения в уравнения равновесия (7.1), убеждаемся, что при отсутствии объемных сил последние сводятся к тождеству. Чтобы преобразовать уравнение неразрывности деформаций (7.3), сложим почленно формулы для нормальных напряжений (7.24)

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}.$$

Правая часть этой суммы представлена оператором Лапласа над функцией $\varphi(r, \theta)$. Следовательно,

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \nabla^2 \varphi$$

и из уравнения (7.3) получаем

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

или

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (7.25)$$

В развернутом виде уравнение неразрывности деформаций (7.25) записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (7.26)$$

Таким образом, функция напряжений $\varphi(r, \theta)$ для плоской задачи в полярных координатах также должна быть бигармонической.

§ 8. Осесимметричные задачи. Решение в перемещениях

Остановимся на плоских задачах, в которых напряжения, а следовательно, и функция $\varphi(r, \theta)$ не зависят от полярного угла θ . В этом случае бигармоническое уравнение (7.26) принимает более простой вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0,$$

или после дифференцирования

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (7.27)$$

Также упрощаются выражения напряжений (7.24):

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}; \quad \sigma_\theta = \frac{d^2 \varphi}{dr^2}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (7.28)$$

При отсутствии объемных сил останется только одно из уравнений равновесия (7.1)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (7.29)$$

Упростятся и геометрические соотношения Коши (7.4), так как составляющая перемещения v в силу симметрии равна нулю:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \gamma_{r\theta} = 0. \quad (7.30)$$

Из формул закона Гука (7.5) останутся лишь две:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) / E; \\ \varepsilon_r &= (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) / E. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Осесимметричную задачу в перемещениях можно решить в общем виде. Из формул закона Гука (а) находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= [E/(1-\nu^2)] (\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta); \\ \sigma_\theta &= [E/(1-\nu^2)] (\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

С помощью соотношений (7.30) исключаем из этих уравнений составляющие деформации:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= [E/(1-\nu^2)] \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= [E/(1-\nu^2)] \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right). \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти напряжения в уравнение равновесия (7.29), получаем дифференциальное уравнение относительно составляющей перемещения w :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (7.31)$$

Оно имеет переменные коэффициенты. Для решения приведем его к уравнению с постоянными коэффициентами посредством следующей подстановки:

$$t = \ln r \quad (7.32)$$

или

$$r = e^t. \quad (B)$$

Дифференцируя выражение (7.32) по переменной r , получаем

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}. \quad (r)$$

Установим связь между производными функции w по старой и новой переменным:

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dr}.$$

С учетом равенства (r) получаем

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dt}. \quad (д)$$

Вторая производная

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{du}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{du}{dt} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{du}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{dt^2} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt} \right). \end{aligned} \quad (e)$$

Подставляя производные (д) и (е) в уравнение (7.31), находим

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - u = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u = Ae^t + Be^{-t}.$$

Возвращаясь к старой переменной r , согласно зависимостям (7.32) и (в) получаем

$$u = Ar + B/r. \quad (7.33)$$

Зная составляющую перемещения u , находим из уравнений (7.30) составляющие деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= A - B/r^2; \\ \varepsilon_\theta &= A + B/r^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

а из формул (б) — составляющие напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= [E/(1-\nu^2)] [(1+\nu)A - (1-\nu)B/r^2]; \\ \sigma_\theta &= [E/(1-\nu^2)] [(1+\nu)A + (1-\nu)B/r^2]. \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

Постоянные A и B определяются из граничных условий.

§ 9. Расчет трубы с толстыми стенками (задача Ламе)

Примером осесимметричной задачи является задача Ламе о толстостенной круглой трубе, находящейся под действием внутреннего p_a и внешнего p_b равномерных давлений (рис. 42). Внутренний радиус трубы равен a , внешний — b .

Для решения воспользуемся формулами напряжений (7.35), полученными из общего решения осесимметричной задачи в перемещениях. Так как рассматриваемая задача относится к случаю плоской деформации, то указанные формулы должны включать упругие постоянные E_1 и ν_1 . Согласно обозначениям (6.6), имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= [E_1/(1-\nu_1^2)] [(1+\nu_1)A - \\ &\quad - (1-\nu_1)B/r^2]; \\ \sigma_\theta &= [E_1/(1-\nu_1^2)] [(1+\nu_1)A + \\ &\quad + (1-\nu_1)B/r^2]. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

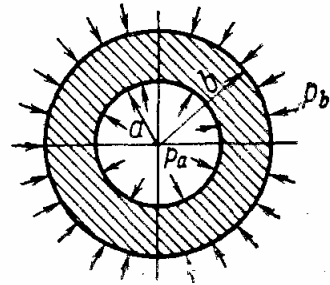


Рис. 42

Для определения постоянных A и B имеем следующие условия на поверхности:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \quad \sigma_r &= -p_a; \\ \text{при } r = b \quad \sigma_r &= -p_b. \end{aligned}$$

Подставляя их в формулы (а), получаем:

$$\begin{aligned} -p_a &= [E_1/(1-\nu_1^2)] [(1+\nu_1)A - (1-\nu_1)B/a^2]; \\ -p_b &= [E_1/(1-\nu_1^2)] [(1+\nu_1)A - (1-\nu_1)B/b^2]. \end{aligned}$$

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$A = \frac{1-\nu_1}{E_1} \frac{\rho_a a^2 - \rho_b b^2}{b^2 - a^2};$$

$$B = \frac{1+\nu_1}{E_1} \frac{(\rho_a - \rho_b) a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

После подстановки найденных постоянных в уравнения (а) получаем напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\rho_a a^2 - \rho_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (\rho_b - \rho_a)}{r^2 (b^2 - a^2)}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\rho_a a^2 - \rho_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (\rho_b - \rho_a)}{r^2 (b^2 - a^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

Интересно отметить, что сумма нормальных напряжений σ_r и σ_θ во всех точках трубы одинакова. Действительно, складывая почленно формулы (7.36), находим

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \frac{\rho_a a^2 - \rho_b b^2}{b^2 - a^2} = \text{const.} \quad (6)$$

В случае плоской деформации в поперечных сечениях трубы возникают также нормальные напряжения σ_z . По аналогии с формулой (6.1),

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta).$$

Подставляя сюда сумму напряжений (6), получаем

$$\sigma_z = 2\nu \frac{\rho_a a^2 - \rho_b b^2}{b^2 - a^2} = \text{const.}$$

Таким образом, осевые нормальные напряжения σ_z постоянны по длине трубы. Исключение составляют сечения, находящиеся вблизи концов трубы, где, очевидно, труба не будет испытывать плоской деформации.

В частном случае, когда на трубу действует только внутреннее давление, т. е. $\rho_b = 0$, формулы напряжений (7.36) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\rho_a a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\rho_a a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Эпюры этих напряжений изображены на рис. 43, а. Наибольшие сжимающие радиальные и растягивающие тангенциальные нормальные напряжения возникают в точках у внутренней поверхности трубы, т. е. при $r = a$:

$$\max \sigma_r = -\rho_a;$$

$$\max \sigma_\theta = \rho_a \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}.$$

В точках у наружной поверхности трубы (при $r = b$)

$$\sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\theta = \frac{2p_a a^2}{b^2 - a^2}.$$

Рассмотрим трубу наружным радиусом, намного большим внутреннего. Из формул (7.37) после деления числителя и знаменателя на b^2 получаем:

$$\sigma_r = -\frac{p_a a^2}{1 - a^2/b^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^2}{1 - a^2/b^2} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Переходя к пределу при $b \rightarrow \infty$, находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_a a^2}{r^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{p_a a^2}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{В})$$

Это значит, что все точки трубы испытывают одинаковые по значению радиальные и тангенциальные напряжения, отличающиеся лишь знаком. Следовательно, труба с бесконечно большим наружным радиусом

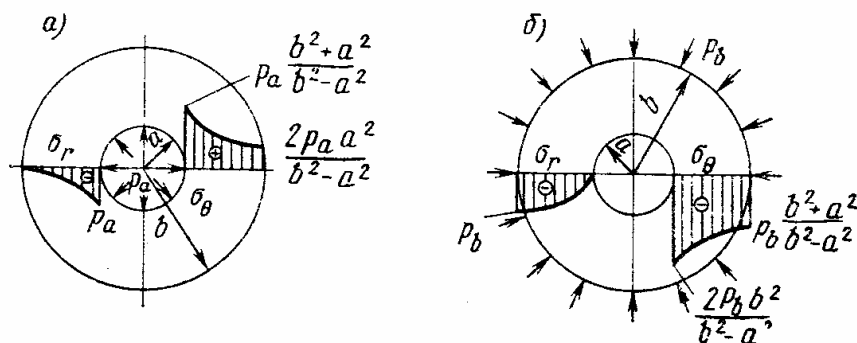


Рис. 43

находится в условиях чистого сдвига. В точках внутренней поверхности (при $r = a$) эти напряжения равны давлению p_a , а в точках, соответствующих $r = 4a$, они составляют $p_a/16$. Если в практических расчетах достаточна точность в 6%, то наружный радиус $b > 4a$ можно считать бесконечно большим. В этом случае решение не связано с формой внешнего контура и формулы (в) характеризуют распределение напряжений для трубы с любой формой внешнего контура при условии, что все его точки отстоят от центра отверстия на расстоянии, большем $4a$.

В другом частном случае, когда на трубу действует только наружное давление ($p_a = 0$), из формул (7.36) получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Эпюры этих напряжений изображены на рис. 43, б. В точках внутренней поверхности при $r = a$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0; \\ \sigma_\theta &= -\frac{2p_b b^2}{b^2 - a^2}, \end{aligned}$$

а в точках наружной поверхности при $r = b$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_b; \\ \sigma_\theta &= -p_b \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

§ 10. Решение осесимметричной задачи с помощью функции напряжений

Найдем функцию напряжений осесимметричной задачи. Бигармоническое уравнение осесимметричной задачи (7.27) представляет собой дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Чтобы получить уравнение с постоянными коэффициентами, переходим к новой переменной t с помощью подстановки (7.32). Связь между производными функции φ по старой и новой переменным устанавливаем аналогично тому, как это сделано в § 8:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dt}; \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2} &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dt} \right); \\ \frac{d^3\varphi}{dr^3} &= \frac{1}{r^3} \left(\frac{d^3\varphi}{dt^3} - 3 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} \right); \\ \frac{d^4\varphi}{dr^4} &= \frac{1}{r^4} \left(\frac{d^4\varphi}{dt^4} - 6 \frac{d^3\varphi}{dt^3} + 11 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - 6 \frac{d\varphi}{dt} \right). \end{aligned}$$

Подставляя выражения производных в уравнение (7.27), получаем линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4} - 4 \frac{d^3\varphi}{dt^3} + 4 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Его решение имеет вид

$$\varphi(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t}.$$

Переходя к старой переменной r , получаем общее решение уравнения (7.27):

$$\varphi(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (7.39)$$

По формулам (7.28) находим напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C_2/r^2 + 2C_3 + C_4(2 \ln r + 1); \\ \sigma_\theta &= C_2/r^2 + 2C_3 + C_4(2 \ln r + 3); \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

Полученные уравнения представляют собой общее решение осесимметричной задачи. Остается лишь определить из граничных условий значения постоянных C_2 , C_3 и C_4 .

§ 11. Чистый изгиб криволинейного бруса. Задача Головина

При чистом изгибе криволинейного бруса, ось которого очерчена по дуге окружности (рис. 44), распределение напряжений во всех радиальных сечениях одинаковое. Следовательно, напряжения в таком бруске можно определять по формулам (7.40). Для определения входящих в эти формулы постоянных имеем следующие условия на криволинейных поверхностях:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0; \quad (a)$$

$$\text{при } r = b \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0. \quad (б)$$

На торцах равнодействующая усилий должна быть равна нулю, т. е.

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = 0, \quad (в)$$

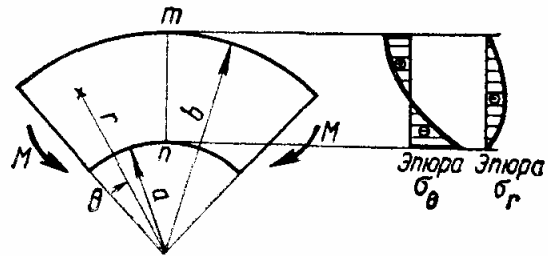


Рис. 44

и поэтому эти усилия должны приводиться к паре с моментом M :

$$\int_a^b \sigma_\theta r dr = M. \quad (г)$$

Условия (а) и (б) для касательных напряжений $\tau_{r\theta}$ выполняются тождественно, а в отношении нормальных напряжений σ_r после подстановки первой формулы (7.40) приводятся к следующим уравнениям:

$$C_2/a^2 + 2C_3 + C_4(2 \ln a + 1) = 0; \quad (д)$$

$$C_2/b^2 + 2C_3 + C_4(2 \ln b + 1) = 0. \quad (е)$$

Условие (в) принимает следующий развернутый вид:

$$\int_a^b [-C_2/r^2 + 2C_3 + C_4(2 \ln r + 3)] dr = 0,$$

откуда после интегрирования

$$C_2/b + 2C_3b + C_4b(2 \ln b + 1) - C_2/a + 2C_3a + C_4a(2 \ln a + 1) = 0. \quad (\text{ж})$$

Аналогично из условия (г) в виде

$$\int_a^b [-C_2/r_2 + 2C_3 + C_4(2 \ln r + 3)] r dr = M$$

после интегрирования получаем

$$-C_2 \ln(b/a) + (C_3 + C_4)(b^2 - a^2) + C_4(b^2 \ln b - a^2 \ln a) = M. \quad (\text{з})$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (д) и (е) условие (ж) удовлетворяется тождественно. Решая совместно уравнения (д), (е) и (з), получаем:

$$\begin{aligned} C_2 &= 4(M/k)a^2b^2 \ln(b/a); \\ C_3 &= -(M/k)[b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)]; \\ C_4 &= (2M/k)(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение:

$$k = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 [\ln(b/a)]^2.$$

Подставляя полученные постоянные в формулы (7.40), находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4M}{k} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{4M}{k} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{b}{r} - a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 - a^2 \right); \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

Эпюры напряжений σ_r и σ_θ построены на рис. 44.

Точное решение задачи о чистом изгибе, а также задачи о поперечном изгибе криволинейного бруса впервые получено в 1881 г. русским ученым Х. С. Головиным.

Сравнивая формулы (7.41) и (6.23), замечаем, что в отличие от прямого бруса при чистом изгибе криволинейного существует давление волокон друг на друга. В сопротивлении материалов решение задачи о чистом изгибе криволинейного бруса основано на гипотезе плоских сечений и допущении об отсутствии давления продольных волокон друг на друга. При этом получают следующие результаты:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{M}{Fz_0} \frac{z_0 + z}{r_0 + z}; \\ \sigma_r &= \tau_{r\theta} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

где F — площадь поперечного сечения; z_0 — расстояние от центра тяжести сечения до нейтральной оси; r_0 — средний радиус кривизны бруса.

В табл. 2 приведены результаты вычисления напряжений по формулам (7.41) и (7.42) для бруса большой кривизны, когда высота сечения $h = r_0$ или радиус $b = 3a$. Наибольшее значение напряжения σ_θ , полученное методом теории упругости, принято за единицу.

Таблица 2

Формулы	σ_θ		$\max \sigma_r$
	при $r = a$	при $r = b$	
Теории упругости (7.41)	-1,000	0,492	-0,192
Сопrotивления материалов (7.42) . . .	-1,005	0,480	0
Расхождение, %	0,5	2,5	—

Как видно из таблицы, даже при очень большой кривизне бруса решение сопротивления материалов в отношении нормального напряжения σ_θ отличается всего на 2,5% от точного решения. Максимальные нормальные напряжения σ_r составляют 19,2% от $\max \sigma_\theta$, однако они возникают в точках, где напряжения σ_θ близки к нулю, и, следовательно, не имеют значения при оценке прочности. Поэтому при расчете криволинейных брусков решение сопротивления материалов вполне приемлемо.

§ 12. Понятие о расчете цилиндрических катков

Расчет цилиндрических катков представляет собой задачу о сжатии тел, соприкасающихся по поверхности конечных размеров. Такая задача относится к разряду контактных. Она встречается при расчете опорных частей мостов, эстакад, шлюзовых ворот, при изучении местных напряжений в колесах подвижного состава, в головках железнодорожных рельсов.

Рассмотрим два параллельных цилиндра, соприкасающихся по образующей и сжимаемых равномерно распределенными по длине силами, равнодействующие которых направлены по оси x (рис. 45). Вследствие деформирования под действием этих сил соприкосновение цилиндров произойдет по некоторой поверхности в виде узкой полосы, называемой *поверхностью давления*. Ее ширина всегда мала по сравнению с размерами цилиндров, поэтому рассматриваемую задачу можно решать как плоскую задачу теории упругости.

Вырежем у одного из цилиндров диск толщиной, равной единице. Если принять в расчет действительную геометрическую форму соприкасающихся тел, то определение напряжений и деформаций в области контакта окажется невозможным. Поэтому ввиду малости ширины поверхности контакта по сравнению с диаметрами цилиндров соприкасающиеся тела заменяют двумя упругими полуплоскостями. Силы же давления, возникающие на поверхности контакта, считают приложенными к каждой полуплоскости.

Вся трудность дальнейшего решения заключается в определении закона распределения давления p по линии контакта. Немецкий ученый Г. Герц в 1883 г. показал, что это распределение вдоль оси y можно принять по закону полуэллипса. Согласно рис. 46,

$$p^2/p_0^2 + y^2/b^2 = 1, \quad (a)$$

где p_0 — максимальная ордината на эпюре давления посередине полосы давления; b — половина ширины полосы давления.

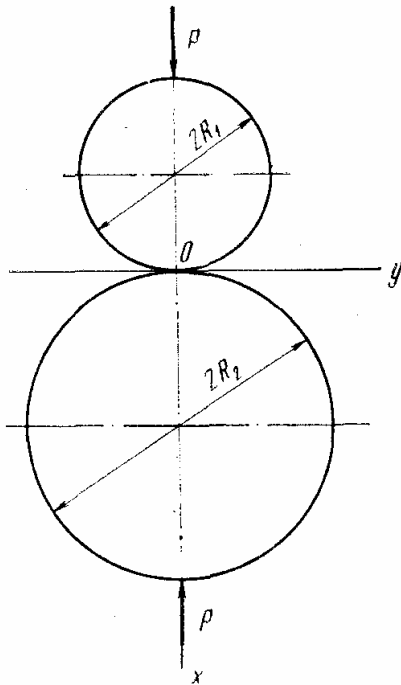


Рис. 45

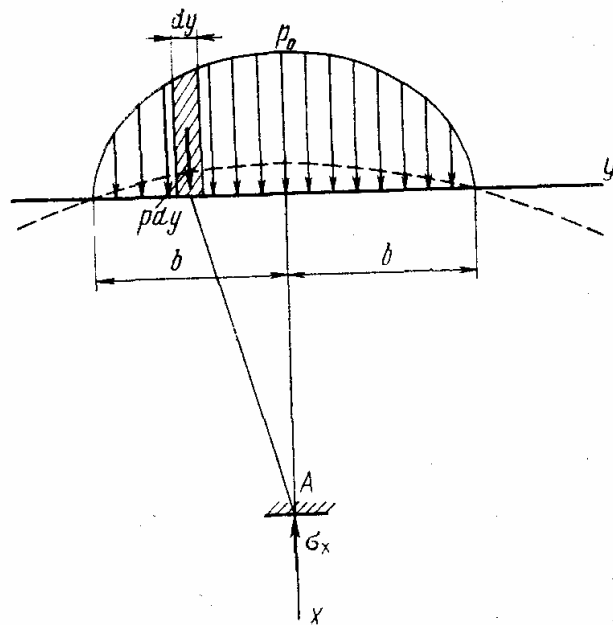


Рис. 46

Определим нормальное напряжение σ_x в произвольной точке A на оси x . Напряжение, создаваемое элементарной силой pdy , согласно первой формуле (7.21), составляет

$$d\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} p dy,$$

а напряжение от давления по всей площади контакта

$$\sigma_x = -\frac{2x^3}{\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{p dy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Подставим в это выражение интенсивность давления p из формулы (a) и выполним интегрирование:

$$\sigma_x = -\frac{2p_0 x^3}{\pi b} \int_{-b}^{+b} \frac{(b^2 - y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{p_0 b}{(x^2 + b^2)^{1/2}}.$$

Если цилиндры сжимаются силой P , приходящейся на единицу длины образующей, то

$$P = \int_{-b}^{+b} p dy.$$

Подставляя сюда p из формулы (а) и выполняя интегрирование, находим

$$p_0 = 2P/(\pi b).$$

Тогда выражение напряжения σ_x в точках на оси x принимает вид

$$\sigma_x = -2P/[\pi(x^2 + b^2)^{1/2}]. \quad (7.43)$$

При $x = 0$ это напряжение достигает максимального абсолютного значения $\max |\sigma_x| = 2P/(\pi b)$.

Для определения ширины полосы контакта необходимо рассмотреть деформации в области контакта. Приводим результаты решения для случая, когда материал обоих цилиндров одинаков и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$;

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

где R_1 и R_2 — радиусы соприкасающихся цилиндров; E — модуль упругости материала цилиндров.

Материал соприкасающихся тел в центре площади контакта находится в условиях объемного напряженного состояния и поэтому может безопасно работать при больших сжимающих напряжениях. Так, например, сталь железнодорожного рельса выдерживает давление порядка 3500—4000 МПа. При этом на поверхности контакта расчетные напряжения близки к пределу текучести, а внутри соприкасающихся тел даже превышают его.

§ 13. Понятие о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство

Упругим полупространством называется часть пространства, ограниченная плоскостью. Задача о действии силы P , приложенной по нормали к этой плоскости (рис. 47), относится к пространственной задаче теории упругости и является более сложной, чем задача о действии силы на границе полуплоскости (см. § 6 данной главы). Ее решение удобно строить в цилиндрической системе координат. В этой системе любая точка пространства определяется тремя координатами r , θ , z . Задача является осесимметричной, поэтому все сечения, параллельные плоскости rOz , находятся в одинаковых условиях и все функции не зависят от полярного угла θ .

Решение рассматриваемой задачи принадлежит Ж. Буссинеску. Интегрирование системы дифференциальных уравнений равновесия

и уравнений неразрывности деформаций Бельтрами — Мичелла в цилиндрической системе координат дает следующий результат:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[(1-2\nu) \frac{R}{R+z} - \frac{3r^2 z}{R^3} \right]; \\ \sigma_\theta &= -\frac{P}{2\pi R^2} (1-2\nu) \left(\frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right); \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi R^2} \frac{z^3}{R^3}; \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi R^2} \frac{rz^2}{R^3}; \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

здесь по-прежнему ν — коэффициент Пуассона, а $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Напряженное состояние, описываемое формулами (а), изображено на рис. 48. Из формул следует, что на любой прямой $z/r = \text{const}$ напряжения обратно пропорциональны квадрату расстояния от начала координат O .

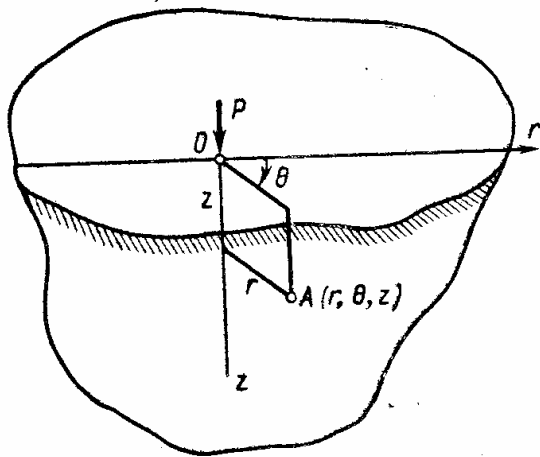


Рис. 47

Решение, как и в плоской задаче, имеет особенность в начале координат, поэтому для включения в него силы P произведена ее замена статически эквивалентной нагрузкой, которая распределена по сфере малого радиуса ρ , очерченной из начала координат (см. рис. 35). На основании принципа Сен-Венана такая замена скажется на распределении напряжений только вблизи начала координат.

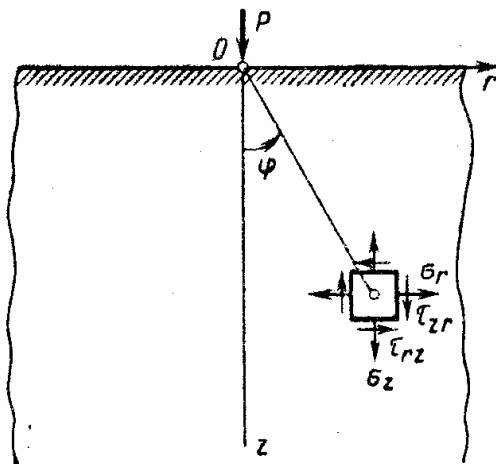


Рис. 48

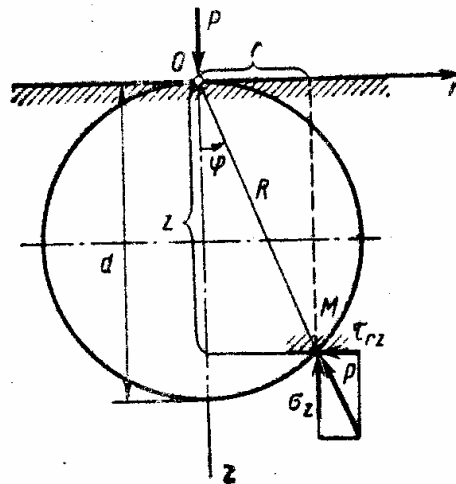


Рис. 49

На горизонтальной площадке в произвольной точке M (рис. 49) отношение напряжений

$$\tau_{rz}/\sigma_z = r/z = \operatorname{tg} \varphi$$

и, следовательно, направление полного напряжения на этой площадке p проходит через начало координат O . Величина этого напряжения

$$p = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} = \frac{3Pz^2}{2\pi R^3} \sqrt{r^2 + z^2} = \frac{3Pz^2}{2\pi R^4} = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{R^2}.$$

Если начертить сферу диаметром d , проходящую через точку M и касающуюся границы плоскости в начале координат (рис. 49), то

$$\cos \varphi/R = 1/d$$

и полное напряжение

$$p = 3P/(2\pi d^2).$$

Таким образом, во всех точках рассматриваемой сферы полное напряжение на горизонтальных площадках постоянно.

Для определения перемещений в полупространстве необходимо напряжения (а) подставить в формулы закона Гука, выраженные в цилиндрической системе координат, и найти деформации. Затем следует проинтегрировать геометрические соотношения Коши в цилиндрической системе координат, в результате чего получим следующие составляющие перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{P(1+\nu)r}{2\pi ER^2} \left[(1-2\nu) \frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right]; \\ v &= 0; \\ w &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[2(1-\nu) + \frac{z^2}{R^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где u — радиальная составляющая перемещения; v — окружная, а w — перемещение вдоль оси z .

Из формул (6) следует, что на любой прямой $z/r = \operatorname{const}$ перемещения обратно пропорциональны расстоянию от начала координат и при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

Наибольший интерес представляют вертикальные перемещения точек на граничной плоскости (при $z = 0$)

$$w|_{z=0} = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi Er}.$$

Эта формула справедлива во всех точках, за исключением малой области у начала координат.

Решение, полученное для сосредоточенной силы, можно распространить на нагрузку, распределенную по некоторой площади граничной плоскости.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

ГЛАВА VIII

ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

§ 1. Основные понятия и гипотезы

Пластинкой называется призматическое или цилиндрическое тело, высота которого мала по сравнению с размерами в плане (рис. 50). Высота называется толщиной пластинки и обозначается h .

Плоскость, делящая пластинку пополам по толщине, называется *срединной*. При изгибе пластинки срединная плоскость превращается в изогнутую поверхность. Линия пересечения боковой поверхности пластинки со срединной плоскостью называется *контуром пластинки*.

Для исследования деформаций пластинки будем прямоугольную систему координат располагать так, чтобы координатная плоскость xOy совпадала со срединной плоскостью, а ось z направлять вниз. При

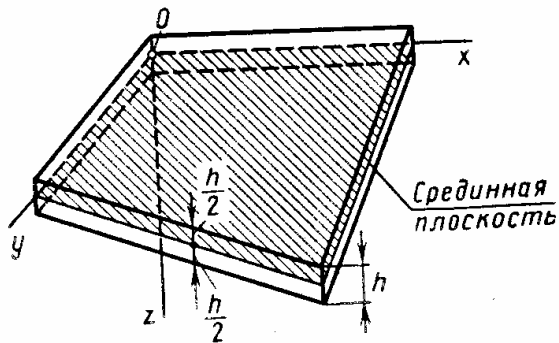


Рис. 50

таком выборе системы координат составляющая перемещения w в направлении оси z будет представлять собой прогиб пластинки. Положение начала координат в срединной плоскости будем выбирать в каждом рассматриваемом случае в зависимости от очертания контура пластинки и характера закрепления ее краев.

Пластинки находят широкое применение в строительстве в виде настилов и панелей, железобетонных плит для покрытия производственных зданий, плит для фундаментов массивных зданий и т. д. Расчетной схемой плит, применяемых в строительных конструкциях, является тонкая пластинка.

Тонкими называются пластинки, имеющие отношение толщины к наименьшему характерному размеру в плане h/b примерно в пределах $1/5—1/80$ и величину ожидаемых прогибов не более $h/4$. Академик Б. Г. Галеркин показал, что теорию тонких пластинок можно использовать даже при $h/b = 1/3$. Пластинки, у которых

$h/b > 1/3$, рассчитывают по теории толстых плит, а пластинки, имеющие прогибы более $1/4h$, — по теории гибких пластинок, или мембран.

Тонкие пластинки обычно рассчитывают по приближенной теории — технической теории изгиба пластинок, которая основана на следующих гипотезах, предложенных немецким физиком Г. Кирхгофом.

1. *Гипотеза прямых нормалей*: любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформирования пластинки, и длина его не изменяется. Эта гипотеза аналогична гипотезе плоских сечений в теории изгиба балок.

Любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости, направлен вдоль оси z , и, следовательно, первая часть гипотезы предполагает, что прямые углы между этим элементом и осями x , y остаются прямыми, т. е. сдвиги в указанных плоскостях отсутствуют

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0; \\ \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Гипотеза о сохранении длины прямолинейного элемента предполагает, что линейная деформация в направлении оси z (по толщине пластинки) отсутствует:

$$\epsilon_z = 0. \quad (8.2)$$

2. *Гипотеза о недеформируемости срединной плоскости*: в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига, т. е. она является нейтральной и ее перемещения

$$u_0 = v_0 = 0. \quad (8.3)$$

3. *Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости*. Гипотеза позволяет пренебрегать напряжением σ_z ввиду малости по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y . Аналогичная гипотеза принималась в теории изгиба балок.

§ 2. Перемещения и деформации в пластинке

Изучение изгиба пластинки начнем с определения перемещений и деформаций. Исследуем пластинку, несущую поперечную нагрузку, т. е. нагрузку, нормальную к срединной плоскости пластинки. Под действием этой нагрузки пластинка получит перемещения. Для их определения обратимся к принятым гипотезам.

Следуя первой гипотезе и подставляя условие (8.2) в третью из формул (4.3), получаем

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

откуда следует, что прогибы пластинки w не зависят от координаты z , т. е.

$$w = w(x, y).$$

Это означает, что все точки пластинки, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые перемещения w . Следовательно, достаточно определить прогибы срединной плоскости пластинки, чтобы знать вертикальные перемещения всех ее точек.

Рассматривая условия для сдвигов (8.1), из формул (4.3) получаем

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0;\end{aligned}$$

отсюда находим производные составляющих перемещения u и v :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Интегрируя эти уравнения по z , получаем

$$\left. \begin{aligned}u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y); \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y).\end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для вычисления функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, появившихся при интегрировании уравнений в частных производных, воспользуемся гипотезой о недеформируемости срединной плоскости. Подставляя условия (8.3) в формулы (a) при $z = 0$, получаем:

$$\begin{aligned}u_0 &= f_1(x, y) = 0; \\ v_0 &= f_2(x, y) = 0.\end{aligned}$$

Тогда формулы (a) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}u &= -z \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Таким образом, составляющие перемещения точек пластинки в направлениях осей x и y выражены через функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Составляющие деформации пластинки, отличные от нуля, находим с помощью формул (4.3), подставляя в них значения составляющих перемещения (8.4):

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Здесь составляющие деформации, так же как и составляющие перемещения в соотношениях (8.4), выражены через одну функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

§ 3. Напряжения в пластинке

Для вычисления нормальных напряжений σ_x и σ_y воспользуемся двумя первыми формулами закона Гука (4.5) и на основании третьей гипотезы отбросим напряжение σ_z . Тогда получим:

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu\sigma_y)/E;$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E;$$

отсюда с учетом зависимостей (8.5) находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Четвертая формула закона Гука после подстановки угловой деформации γ_{xy} из формул (8.5) принимает такой вид:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (б)$$

Касательные напряжения в двух других плоскостях, согласно равенствам (8.1), обращаются в нуль:

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = 0;$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = 0.$$

Однако такой результат получен только вследствие принятых ранее гипотез. В действительности эти касательные напряжения не равны нулю, поскольку это противоречит условиям равновесия. Действительно, рассмотрим дифференциальные уравнения равновесия (4.1). Пренебрегая объемными силами, из первого уравнения находим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Подставим сюда напряжения из формул (а) и (б):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}.$$

После упрощения получаем

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

или

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Интегрируя по z , находим

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega + f_3(x, y). \quad (в)$$

Для определения произвольной функции $f_3(x, y)$ имеем следующие граничные условия: на верхней и нижней поверхностях пластинки нет касательных нагрузок, т. е. при $z = \pm h/2$ $\tau_{zx} = 0$. Подставляя эти условия в формулу (в), получаем

$$0 = \frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega + f_3(x, y),$$

откуда искомая функция

$$f_3(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega.$$

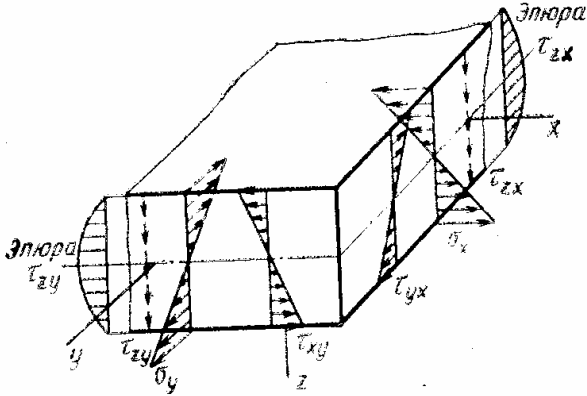


Рис. 51

Вводя ее в формулу (в), получаем

$$\tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega. \quad (г)$$

Решая таким же путем второе уравнение равновесия (4.1), находим

$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega. \quad (д)$$

Итак, согласно формулам (а), (б), (г) и (д), в сечениях пластинки, перпендикулярных ее срединной плоскости, возникают следующие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega; \\ \tau_{zx} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

На рис. 51 показаны эпюры этих напряжений по толщине пластинки. Напряжения σ_x , σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ распределяются по линейному закону, обращаясь в нуль в точках срединной плоскости; напряжения τ_{yz} и τ_{zx} распределяются по параболе, достигая в точках срединной плоскости максимального значения. Так же распределяются касатель-

ные напряжения и при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения.

В формулах (8.6) все напряжения выражены через одну функцию двух переменных $w(x, y)$, следовательно, функция прогибов играет здесь ту же роль, что и функция напряжений в плоской задаче.

§ 4. Усилия в пластинке

Исследуем, какие усилия соответствуют напряжениям (8.6) в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости. На рис. 52 изображен бесконечно малый элемент пластинки, вырезанный такими сечениями. Рассмотрим вначале площадку с нормалью, параллельной оси x . По ней действуют составляющие напряжений σ_x , τ_{yx} и τ_{zx} . На рисунке показаны положительные напряжения: нормальное напряжение σ_x направлено по внешней нормали к сечению, а касательные — в направлении соответствующих положительных координатных осей, так как внешняя нормаль к сечению совпадает с положительным направлением оси x .

Обозначим через N_x нормальную силу, приходящуюся на единицу ширины рассматриваемого сечения. Она равна проекции на ось x равнодействующей внутренних сил в сечении с нормалью, параллельной оси x . На эту ось проецируется только нормальное напряжение σ_x . Соответствующая ему внутренняя сила на бесконечно малой площадке $dydz$ равна $\sigma_x dydz$, а на единицу ширины сечения приходится сила $\sigma_x dz$. Суммируя эти элементарные силы по толщине пластинки, получаем выражение нормальной силы

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz.$$

Подставим сюда нормальное напряжение σ_x из формул (8.6) и вынесем за знак интеграла величины, не зависящие от координаты z :

$$N_x = - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z dz.$$

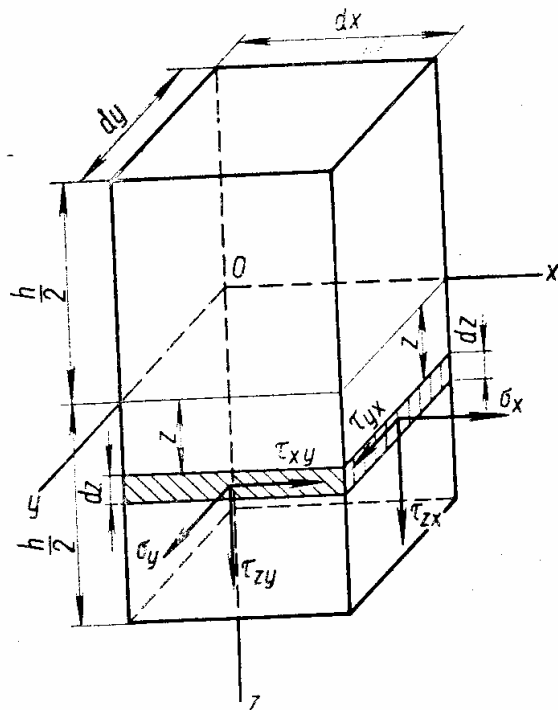


Рис. 52

Под знаком интеграла стоит нечетная функция, а пределы интегрирования отличаются только знаком. Поэтому интеграл равен нулю, а следовательно, нормальная сила $N_x = 0$.

Аналогично определяем изгибающий момент M_x , представляющий собой сумму элементарных моментов $\sigma_x dz \cdot z$:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz.$$

После интегрирования получаем

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Входящая сюда величина

$$D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)] \quad (8.7)$$

называется *цилиндрической жесткостью*. Она является физико-геометрической характеристикой пластинки при изгибе.

Поперечная сила в рассматриваемом сечении

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{zx} dz.$$

Подставим в этот интеграл выражение касательного напряжения τ_{zx} из формул (8.6):

$$Q_x = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz.$$

После интегрирования получаем

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Сдвигающую силу S_x находим, суммируя проекции внутренних сил в том же сечении на ось y :

$$S_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} dz.$$

После подстановки касательного напряжения τ_{yx} из формул (8.6)

$$S_x = 0.$$

Крутящий момент

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z dz = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (a)$$

Аналогично определяются усилия в сечении с нормалью, параллельной оси y (рис. 52):

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w;$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Сравнивая формулы (а) и (б), замечаем, что

$$M_{yx} = M_{xy} = H.$$

Таким образом, под действием поперечной нагрузки в сечениях пластинки, перпендикулярных ее срединной плоскости, возникают следующие усилия:

изгибающие моменты

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

поперечные силы

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

и крутящий момент

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (8.10)$$

Все они выражены через прогибы срединной плоскости. Положительные направления указанных усилий показаны на рис. 53.

§ 5. Выражения напряжений через усилия

Формулы, выведенные в предыдущем параграфе, позволяют определять моменты и поперечные силы в любой точке срединной плоскости пластинки. По их значению можно найти напряжения в любой точке пластинки. Действительно, сравнивая выражения нормальных напряжений (8.6) с формулами изгибающих моментов (8.8), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 12M_x z/h^3; \\ \sigma_y &= 12M_y z/h^3. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

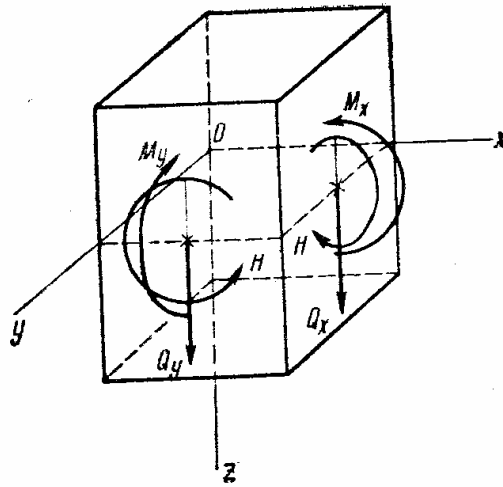


Рис. 53

Эти формулы соответствуют формулам для определения нормальных напряжений при изгибе балки прямоугольного сечения. В них входит момент инерции площади прямоугольного сечения шириной, равной единице, $J = bh^3/12 = h^3/12$. Таким образом, формулы (а) принимают вид, известный из курса сопротивления материалов:

$$\sigma_x = M_x z / J; \quad \sigma_y = M_y z / J.$$

Максимальные по абсолютному значению нормальные напряжения возникают при $z = \pm h/2$:

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_x &= M_x / W; \\ \max \sigma_y &= M_y / W. \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Здесь $W = \frac{J}{h/2} = \frac{h^2}{6}$ — момент сопротивления прямоугольного сечения шириной, равной единице.

Из сравнения формул (8.6) и (8.10) следует

$$\tau_{xy} = 12Hz/h^3.$$

Максимальные касательные напряжения τ_{xy} также возникают при $z = \pm h/2$:

$$\max \tau_{xy} = 6H/h^2.$$

Вертикальные касательные напряжения определяем из сравнения формул (8.6) и (8.9):

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= 6Q_x (h^2/4 - z^2)/h^3; \\ \tau_{yz} &= 6Q_y (h^2/4 - z^2)/h^3. \end{aligned}$$

Аналогичные результаты получены в сопротивлении материалов по формуле Д. И. Журавского для балки прямоугольного сечения шириной, равной единице. Максимальные напряжения возникают в точках срединной плоскости, т. е. при $z = 0$:

$$\begin{aligned} \max \tau_{zx} &= 3Q_x/(2h); \\ \max \tau_{yz} &= 3Q_y/(2h). \end{aligned}$$

§ 6. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

В предыдущих параграфах напряжения и усилия в пластинке выражены через прогибы ее срединной плоскости. Следовательно, для определения напряжений и усилий необходимо знать функцию прогибов $w(x, y)$.

Вырежем из срединной плоскости пластинки бесконечно малый элемент *Ocba* размерами dx, dy и покажем приложенные к нему усилия (рис. 54). На грани *Oc* действует поперечная сила Q_x . На грани *ab*, отстоящей от грани *Oc* на бесконечно малом расстоянии dx , поперечная сила получает бесконечно малое приращение и равна $Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$. Аналогично, на гранях *Oa* и *bc* действуют соответственно

поперечные силы Q_y и $Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$. Нормально к срединной плоскости действует поверхностная нагрузка интенсивностью q .

Для того чтобы рассматриваемый элемент срединной плоскости находился в равновесии, должны удовлетворяться шесть условий равновесия: три уравнения проекций сил на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей. При этом все усилия следует умножать на длину грани, по которой они действуют.

Спроецируем все силы, изображенные на рис. 54, на ось z :

$$\begin{aligned} & \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \\ & + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - \\ & - Q_y dx + q dx dy = 0. \end{aligned}$$

После упрощения получаем

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (8.12)$$

Уравнение моментов всех сил относительно оси y имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx - \\ & - H dx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx + Q_y dx \frac{dx}{2} - \\ & - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} - q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

После упрощения получаем

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x. \quad (8.13)$$

Аналогично, из уравнения моментов относительно оси x следует

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y. \quad (8.14)$$

Исключим из уравнений (8.12)—(8.14) поперечные силы. В результате получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q.$$

Подставим в это уравнение выражения моментов (8.8) и (8.10):

$$-D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -q,$$

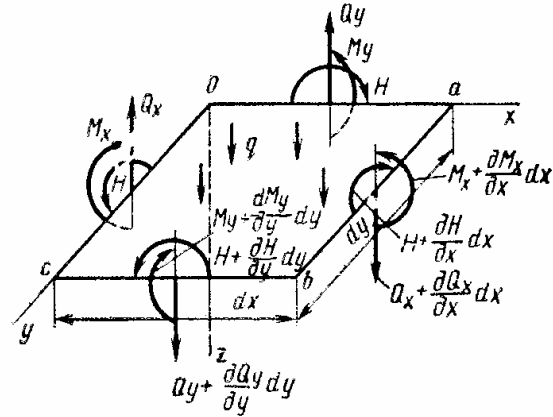


Рис. 54

откуда после упрощения

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (8.15)$$

или

$$D \nabla^4 w - q = 0. \quad (8.16)$$

Получили основное уравнение изгиба пластинки, обычно называемое *уравнением Софи Жермен*. При его интегрировании появятся произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий на контуре пластинки, зависящих от характера закрепления ее краев.

§ 7. Условия на контуре пластинки

В зависимости от характера закрепления краев на контуре пластинки могут быть заданы прогибы и углы поворота срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы. Условия, при которых на контуре задаются перемещения, т. е. прогибы или углы поворота срединной плоскости, называются *геометрическими*. Условия, при которых на контуре задаются усилия, т. е. изгибающие или крутящие моменты и поперечные силы, называются *статическими*. Если же заданы одновременно и перемещения, и усилия, то условия называются *смешанными*. На каждом крае следует задать два граничных условия.

Сформулируем граничные условия для различных случаев закрепления краев прямоугольной пластинки (рис. 55).

Защемленный край OA . В защемлении отсутствуют прогибы и невозможен поворот краевого сечения относительно оси x . В связи с этим имеем следующие условия:

$$\text{при } y = 0 \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Шарнирно опертые края OC и AB . На них равны нулю прогибы и изгибающие моменты, т. е. $w = 0$ и $M_x = 0$. Выражая изгибающий момент через прогибы пластинки согласно формулам (8.8), последнее условие можно представить так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Однако при $x = \text{const}$ и $w = 0$ вторая производная $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. Поэтому граничные условия на шарнирно опертых краях OC и AB принимают вид

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

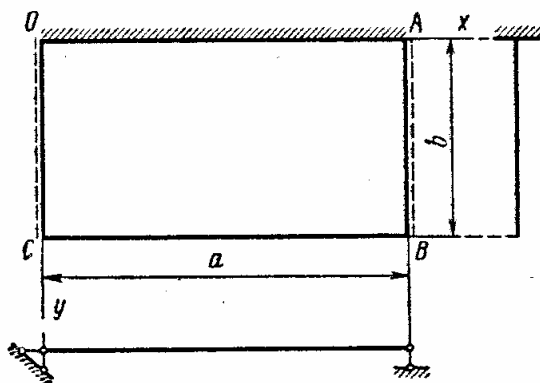


Рис. 55

С в о б о д н ы й к р а й *СВ*. Здесь должны обращаться в нуль изгибающий момент M_y , поперечная сила Q_y и крутящий момент H , т. е. вместо необходимых двух условий появляются три. Такое противоречие связано с тем, что задача решается приближенно и поэтому всем граничным условиям точно удовлетворить нельзя. Однако противоречие можно устранить, объединив два последних условия.

Покажем, что крутящий момент и поперечную силу на контуре пластинки можно заменить одной силой, статически им эквивалентной. Рассмотрим крутящий момент H , распределенный вдоль грани *СВ*, параллельной оси x (рис. 56, а). На длине dx действует крутящий момент, равный Hdx . Его можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил H с плечом dx (рис. 56, б). На бесконечно малом удалении dx крутящий момент получит приращение и будет равен $(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx) dx$.

Его также можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$ с тем же плечом dx .

Подобную замену крутящих моментов вертикальными силами можно осуществить по всей длине грани *СВ*. На границе каждого бесконечно малого участка dx , за исключением крайних точек *С* и *В*, будет приложено по две противоположно направленные силы, разность между которыми равна $\frac{\partial H}{\partial x} dx$. Следовательно, вдоль грани будет действовать вертикальная распределенная по ее длине нагрузка интенсивностью $\frac{\partial H}{\partial x}$ (рис. 56, в). В точках же *С* и *В* возникнут сосредоточенные силы H_C и H_B . Полученную вертикальную нагрузку можно объединить с поперечной силой Q_y и считать, что на грани *СВ* действует приведенная поперечная сила интенсивностью

$$Q_y^{\text{прив}} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} \quad (8.17)$$

Аналогично, вдоль граней контура пластинки, параллельных оси y , будет действовать приведенная поперечная сила интенсивностью

$$Q_x^{\text{прив}} = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} \quad (8.18)$$

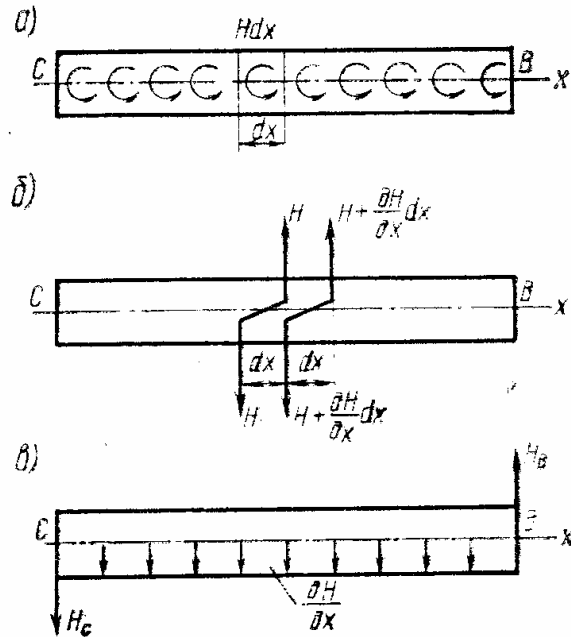


Рис. 56

Производные крутящего момента по x и y найдем дифференцированием функции (8.10):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y}; \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Подставляя значения поперечных сил (8.9) и производных крутящего момента (a) в формулы (8.18) и (8.17), получаем

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{\text{прив}} &= -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ Q_y^{\text{прив}} &= -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

Таким образом, на каждой грани пластинки вместо трех усилий: изгибающего момента, крутящего момента и поперечной силы, — можно рассматривать только два: изгибающий момент и приведенную

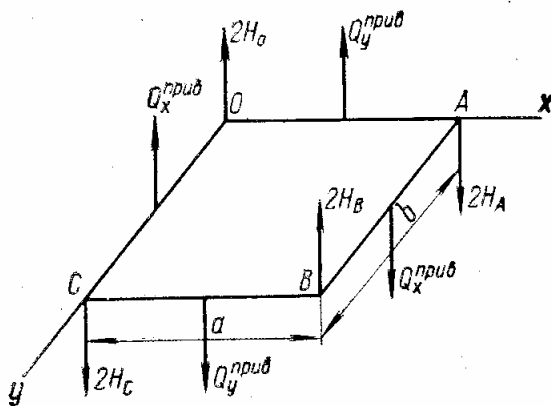


Рис. 57

поперечную силу (положительные направления приведенных поперечных сил на всех гранях, а также сосредоточенных сил, возникающих в углах пластинки, показаны на рис. 57). Следовательно, на свободной от закрепления грани вместо трех упомянутых условий можно потребовать удовлетворения лишь двух:

$$M_y = 0; \quad Q_y^{\text{прив}} = 0. \quad (б)$$

Конечно, при этом граничные условия будут удовлетворяться приближенно. Но на основании принципа Сен-Венана замена поперечной силы и крутящего момента статически им эквивалентной приведенной поперечной силой вызовет лишь местные напряжения вблизи рассматриваемого края пластинки.

Внесем в условия (б) выражения изгибающего момента M_y (8.8) и приведенной поперечной силы $Q_y^{\text{прив}}$ (8.19). Тогда на свободной грани CB , т. е. при $y = b$,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

§ 8. Прямоугольная пластинка. Решение Навье

Решение основного уравнения изгиба (8.15) для прямоугольной пластинки в замкнутой форме получить не удастся. Его приходится искать в виде бесконечного ряда. Рассмотрим шарнирно опертую по контуру прямоугольную пластинку (рис. 58), находящуюся под действием поперечной нагрузки интенсивностью $q(x, y)$, изменяющейся по любому закону. Начало координат расположим в углу пластинки. Размер пластинки в направлении оси x равен a , а в направлении оси y — b .

Решение уравнения (8.15) будем искать в виде двойного тригонометрического ряда по синусам:

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (a)$$

где A_{mn} — постоянные числа, коэффициенты ряда; m и n — целые положительные числа: 1, 2, 3, ...

Ряд (a) можно представить в развернутом виде:

$$\omega(x, y) = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\ + A_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \dots$$

Для шарнирно опертой по контуру пластинки имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=a \quad \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0; \quad (б)$$

$$\text{при } y=0 \text{ и } y=b \quad \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0. \quad (в)$$

Убедимся, что ряд (a) удовлетворяет этим условиям. Действительно, на грани пластинки $x=0$ $\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0$ и, следовательно, прогиб $\omega(0, y) = 0$. На грани $x=a$ $\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0$, а значит, и прогиб $\omega(a, y) = 0$. Точно так же обращаются в нуль прогибы на гранях $y=0$ и $y=b$. Следовательно, граничные условия (б) и (в) в отношении прогибов выполняются.

Вторые производные функции прогибов

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = - \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

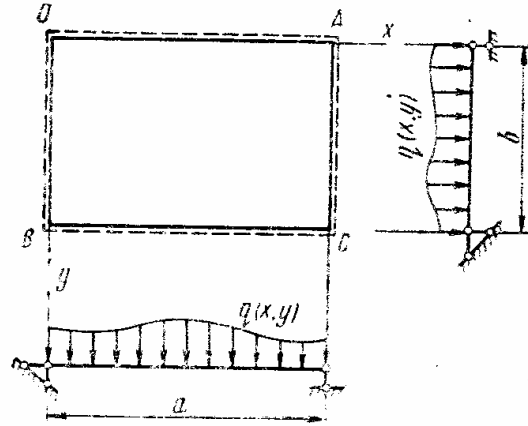


Рис. 58

содержат синусы тех же аргументов, что и сама функция. Поэтому производные обращаются в нуль на всех гранях пластинки: при $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ и $y = b$. Следовательно, граничные условия (б) и (в) для изгибающих моментов также выполняются.

Определим коэффициенты ряда (а). Для этого подсчитаем четвертые производные функции прогибов

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \sum_m \sum_n A_{nm} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\end{aligned}$$

и подставим их в уравнение (8.15). После упрощения получим

$$D\pi^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y). \quad (\text{г})$$

Чтобы определить коэффициенты ряда, входящего в левую часть уравнения (г), необходимо и правую часть этого уравнения разложить в тригонометрический ряд. Представим нагрузку в виде двойного тригонометрического ряда Фурье по синусам в прямоугольной области $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (\text{д})$$

Коэффициенты этого ряда определяются по формуле, известной из курса математического анализа:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (\text{е})$$

Подставляя ряд (д) в уравнение (г), получаем

$$\begin{aligned}D\pi^4 \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} &= \\ &= \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}$$

Два ряда равны между собой, если равны их соответствующие члены. Таким образом,

$$D\pi^4 A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 = C_{mn}.$$

Подставляя сюда вместо C_{mn} выражение (е), находим коэффициенты ряда (а) в такой форме:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (\text{ж})$$

Итак, функция (а) является решением поставленной задачи, так как она удовлетворяет условиям на контуре пластинки и при выборе коэффициентов ряда в форме (ж) удовлетворяет основному уравнению изгиба пластинки. Дальнейшая конкретизация задачи зависит от вида функции $q(x, y)$. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластинки (рис. 59). В этом случае $q(x, y) = q = \text{const}$. Тогда, согласно формуле (ж),

$$A_{mn} = \frac{4q}{D\pi^4 ab (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \times \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (3)$$

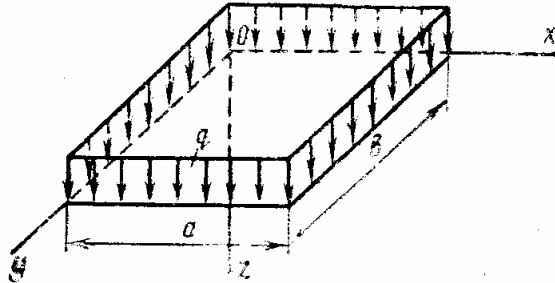


Рис. 59

После интегрирования получаем

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Подставляя значения этих коэффициентов в ряд (а), находим выражение функции прогибов:

$$w(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{mn (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2}. \quad (8.20)$$

Максимальный прогиб, возникающий в центре пластинки (при $x=a/2$ и $y=b/2$), составляет

$$\max w = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\pi/2) \sin(n\pi/2)}{mn (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Подставляя сюда значение цилиндрической жесткости (8.7) и вынося за скобки a^4 , получаем

$$\max w = \frac{192qa^4}{\pi^6 Eh^3} (1-\nu^2) \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\pi/2) \sin(n\pi/2)}{mn (m^2 + n^2 a^2/b^2)^2} \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Для практического использования получаемых результатов составляют таблицы. В этих целях последнюю формулу удобно представить в таком виде: $\max w = \alpha qa^4/(Eh^3)$,

где коэффициент

$$\alpha = \frac{192(1-\nu^2)}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\pi/2) \sin(n\pi/2)}{mn(m^2+n^2 a^2/b^2)^2}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots)$$

зависит только от отношения сторон пластинки a/b . Входящий сюда ряд быстро сходится. Так, сохраняя первые четыре члена ряда и принимая $\nu = 0,3$, для квадратной пластинки ($a = b$) находим

$$\alpha(1) = \frac{192(1-0,3^2)}{\pi^6} \left[\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1 (1^2+1^2)^2} + \frac{1(-1)}{1 \cdot 3 (1^2+3^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(-1) \cdot 1}{3 \cdot 1 (3^2+1^2)^2} + \frac{(-1)(-1)}{3 \cdot 3 (3^2+3^2)^2} \right] = \frac{192 \cdot 0,91}{\pi^6} (0,2500 - 0,0033 - \\ - 0,0033 + 0,0003) = 0,0443,$$

что равно точному значению, приводимому в справочной литературе.

Подставляя функцию прогибов (8.20) в формулы (8.8), получим изгибающие моменты:

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + \nu n^2 a^2/b^2}{mn(m^2+n^2 a^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots);$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 a^2/b^2 + \nu m^2}{mn(m^2+n^2 a^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки (при $x = a/2$ и $y = b/2$):

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + \nu n^2 a^2/b^2}{mn(m^2+n^2 a^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots);$$

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 a^2/b^2 + \nu m^2}{mn(m^2+n^2 a^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Для составления таблиц их представляют в виде

$$\max M_x = \beta qa^2;$$

$$\max M_y = \beta_1 qa^2,$$

где коэффициенты β и β_1 являются функциями отношения сторон пластинки a/b . Ряды в этих функциях сходятся медленнее, чем в функ-

ции α . Так, если подсчитать коэффициент β для квадратной пластинки, сохраняя первые четыре члена ряда, получим

$$\beta(1) = \frac{16}{\pi^4} \left[\frac{1^2 + 0,3 \cdot 1^2}{1 \cdot 1 (1^2 + 1^2)^2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1^2 + 0,3 \cdot 3^2}{1 \cdot 3 (1^2 + 3^2)^2} \cdot 1(-1) + \right. \\ \left. + \frac{3^2 + 0,3 \cdot 1^2}{3 \cdot 1 (3^2 + 1^2)^2} (-1) \cdot 1 + \frac{3^2 + 0,3 \cdot 3^2}{3 \cdot 3 (3^2 + 3^2)^2} (-1)(-1) \right] = 0,0469,$$

в то время как точное значение, приводимое в таблицах, $\beta = 0,0479$. Следовательно, при сохранении четырех членов ряда значение коэффициента β отличается от точного его значения на 2,1%.

Значение поперечных сил найдем, подставив функцию прогибов (8.20) в формулы (8.9):

$$Q_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\cos(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{n(m^2 + n^2 a^2/b^2)} \\ (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots); \\ Q_y = \frac{16qb}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)}{m(m^2 b^2/a^2 + n^2)} \\ (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Максимальные значения поперечные силы получают посередине сторон контура пластинки. Так, $\max Q_x$ возникает в точках с координатами $x = 0$, $y = b/2$ и $x = a$, $y = b/2$, а $\max Q_y$ — в точках с координатами $x = a/2$, $y = 0$ и $x = a/2$, $y = b$:

$$\max Q_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin(n\pi/2)}{n(m^2 + n^2 a^2/b^2)} \\ (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots); \\ \max Q_y = \frac{16qb}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\pi/2)}{m(m^2 b^2/a^2 + n^2)} \\ (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Для табулирования эти функции представляют в таком виде:

$$\max Q_x = \gamma qa; \\ \max Q_y = \gamma_1 qa.$$

где коэффициенты γ и γ_1 являются функциями отношения сторон пластинки a/b . Ряды в этих функциях сходятся еще медленнее, чем в функциях α , α_1 , β и β_1 . Так, сохраняя, как и в предыдущих случаях, то же число членов ряда, для квадратной пластинки получаем

$$\gamma(1) = \frac{16}{\pi^3} \left[\frac{1}{1(1^2 + 1^2)} + \frac{-1}{3(1^2 + 3^2)} + \frac{1}{1(3^2 + 1^2)} + \frac{-1}{3(3^2 + 3^2)} \right] = \\ = \frac{16}{\pi^3} (0,5000 - 0,0333 + 0,1000 - 0,0185) = 0,283,$$

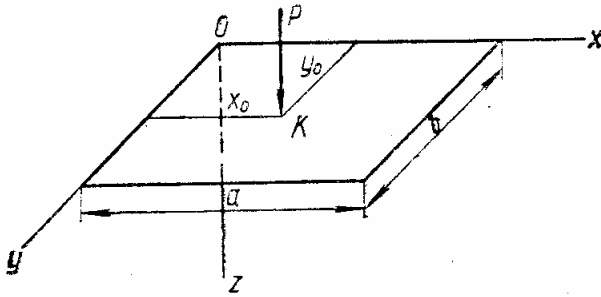


Рис. 60

что отличается от точного значения, равного 0,338, на 16,3%.

2. Сила P сосредоточена в точке K с координатами $x = x_0$ и $y = y_0$ (рис. 60). Представим эту силу в виде нагрузки, распределенной на бесконечно малой площади $dxdy$ вокруг точки K :

$$q(x, y) = P/(dxdy).$$

При вычислении двойного интеграла в формуле (ж) следует учесть, что он обращается в нуль во всех точках, кроме K , где он равен

$$\int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy = P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}.$$

Подставляя это значение в указанную формулу, получаем выражение коэффициентов ряда (а):

$$A_{mn} = \frac{4P \sin(m\pi x_0/a) \sin(n\pi y_0/b)}{D\pi^4 ab (m^2/a^2 + n^2/b^2)^2},$$

а подставляя это выражение в ряд (а), находим функцию прогибов пластинки:

$$w = \frac{4P}{D\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x_0/a) \sin(n\pi y_0/b)}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (8.21)$$

Полученный ряд сходится медленнее, чем ряд (8.20).

Зная функцию прогибов, обычным путем можно найти изгибающие моменты, поперечные силы и крутящие моменты. Ряды, входящие в их функции, сходятся еще хуже, поэтому изложенная методика может быть рекомендована только для нахождения прогибов. Для вычисления же изгибающих моментов, а тем более поперечных сил, она нерациональна.

§ 9. Прямоугольная пластинка. Решение Леви

Решение Л. Навье, рассмотренное в предыдущем параграфе, пригодно только для прямоугольных пластинок, шарнирно опертых по контуру. Более общим является решение М. Леви. Оно пригодно для прямоугольной пластинки, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других имеют любое закрепление (защемление, шарнирное опирание) или свободны.

У пластинки, изображенной на рис. 61, шарнирно опертыми являются края OC и AB . Граничные условия на этих краях таковы:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=a \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (a)$$

Чтобы выполнить эти условия, функцию прогибов можно взять в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} Y \sin \alpha x, \quad (6)$$

где Y — произвольная функция одного аргумента y ; $\alpha = n\pi/a$.

Так как при $x = 0$ и $x = a$ $\sin \alpha x = 0$, то функция (6) удовлетворяет условиям (а) в отношении прогибов. Чтобы проверить условия (а) для изгибающих моментов, подсчитываем вторые частные производные функции прогибов (6) по x и y :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= - \sum_{n=1}^{\infty} Y \alpha^2 \sin \alpha x; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} Y'' \sin \alpha x. \end{aligned} \right\} (b)$$

При $x = 0$ и $x = a$ эти производные, аналогично самой функции, обращаются в нуль и, следовательно, условия (а) в отношении изгибающих моментов также выполняются.

Функция (6) должна удовлетворять основному уравнению изгиба пластинки. Подставляя ее четвертые производные в уравнение (8.15), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = q(x, y)/D. \quad (г)$$

Для решения уравнения (г) разложим его правую часть в тригонометрический ряд Фурье по синусам:

$$q(x, y)/D = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x. \quad (д)$$

Коэффициенты ряда Фурье $F_n(y)$ являются здесь функцией y . Так как разложение производится на отрезке $0 \leq x \leq a$, то их определяют по известной из курса математического анализа формуле

$$F_n(y) = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha x dx. \quad (е)$$

Подставим ряд (д) в уравнение (г):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x.$$

Вынося знак суммирования за скобки, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} [Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y - F_n(y)] \sin \alpha x = 0.$$

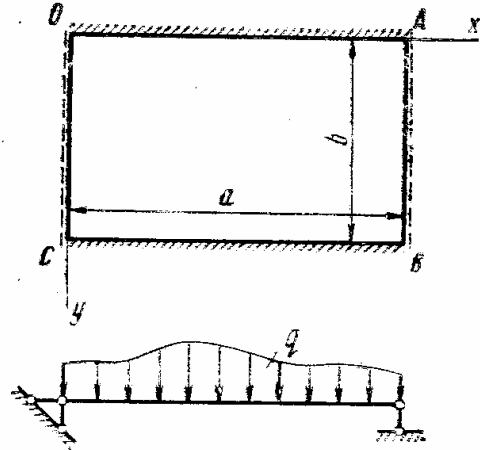


Рис. 61

Это условие выполняется, если каждый член ряда равен нулю:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y - F_n(y) = 0,$$

или

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = F_n(y). \quad (\text{ж})$$

Решение однородного дифференциального уравнения четвертого порядка (ж) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения. Однородное уравнение имеет вид

$$Y_1^{IV} - 2\alpha^2 Y_1'' + \alpha^4 Y_1 = 0. \quad (\text{з})$$

Его решение можно представить так:

$$Y_1 = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y. \quad (\text{и})$$

Обозначив $\bar{F}_n(y)$ частное решение уравнения (ж), получим его общее решение:

$$Y(y) = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \bar{F}_n(y). \quad (\text{к})$$

Подставляя функцию $Y(y)$ в формулу (б), находим

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \bar{F}_n(y)] \sin \alpha x. \quad (\text{л})$$

Функция ω является решением уравнения (8.15) в случае поперечной нагрузки $q(x, y)$, распределенной на поверхности пластинки по любому закону, и, как показано выше, удовлетворяет граничным условиям на шарнирно опертых краях OC и AB .

Рассмотрим построение частного решения $\bar{F}_n(y)$. Согласно правилу Коши, частное решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка выражается интегралом

$$\bar{F}_n(y) = \int_0^y \psi(y-t) F_n(t) dt, \quad (\text{м})$$

где $F_n(t)$ — правая часть решаемого уравнения, которая определяется выражением (е) при замене аргумента y на t , а $\psi(y)$ — частное решение соответствующего однородного уравнения. Оно удовлетворяет условиям

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0, \quad \psi'''(0) = 1. \quad (\text{н})$$

При рассмотрении однородного уравнения (з) согласно формуле (и) получены четыре независимых частных решения: $\operatorname{ch} \alpha y$, $y \operatorname{ch} \alpha y$, $\operatorname{sh} \alpha y$, $y \operatorname{sh} \alpha y$. Из них условиям (н) удовлетворяет только следующая комбинация:

$$\psi(y) = \left(y \operatorname{ch} \alpha y - \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha y \right) / (2\alpha^2). \quad (\text{о})$$

Заменив в функциях (о) и (е) аргументы и подставив эти функции в формулу (м), получим искомое частное решение уравнения (ж):

$$\bar{F}_n(y) = \frac{1}{\alpha^2 Da} \int_0^y \left\{ \left[(y-t) \operatorname{ch} \alpha(y-t) - \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha(y-t) \right] \times \right. \\ \left. \times \int_0^a q(x, t) \sin \alpha x dx \right\} dt.$$

Для определения произвольных постоянных A_n , B_n , C_n и D_n используем граничные условия на краях OA и BC . Рассмотрим пластинку, у которой эти края жестко защемлены (см. рис. 61). Тогда имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } y=0 \text{ и } y=b \quad \omega = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Подставив в них функцию прогибов (б), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y(0) \sin \alpha x = 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} Y'(0) \sin \alpha x = 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} Y(b) \sin \alpha x = 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} Y'(b) \sin \alpha x = 0.$$

Так как эти условия должны выполняться при любых значениях аргумента x , то

$$\left. \begin{aligned} Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0; \\ Y(b) = 0, \quad Y'(b) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{п})$$

Внося в условия (п) функцию (к), получаем систему уравнений для определения постоянных:

$$A_n = 0; \quad B_n + C_n \alpha = 0; \\ A_n \operatorname{ch} \alpha b + B_n b \operatorname{ch} \alpha b + C_n \operatorname{sh} \alpha b + D_n b \operatorname{sh} \alpha b + \bar{F}_n(b) = 0; \\ A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha b + B_n (\operatorname{ch} \alpha b + \alpha b \operatorname{sh} \alpha b) + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha b + \\ + D_n (\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) + \bar{F}'_n(b) = 0,$$

откуда

$$A_n = 0; \\ B_n = \frac{\alpha (\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \bar{F}_n(b) - \alpha b \operatorname{sh} \alpha b \bar{F}'_n(b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}; \\ C_n = \frac{-(\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \bar{F}_n(b) + b \operatorname{sh} \alpha b \bar{F}'_n(b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}; \\ D_n = \frac{-\alpha^2 b \operatorname{sh} \alpha b \bar{F}_n(b) - (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \bar{F}'_n(b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}.$$

При других закреплениях краев OA и BC получаются другие значения постоянных.

Ряды в функции прогибов и ее производных сходятся значительно быстрее, чем тригонометрические ряды в решении Л. Навье, поэтому решение М. Леви более удобно в практических расчетах даже для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по всему контуру.

§ 10. Понятие о расчете прямоугольной пластинки и бесконечной полосы на упругом основании

Рассмотрим прямоугольную пластинку, лежащую на сплошном упругом основании и находящуюся под действием поперечной нагрузки интенсивностью $q(x, y)$ (рис. 62). Снизу к пластинке приложены силы реактивного давления упругого основания (отпор основания), представляющего собой неизвестную функцию координат $p(x, y)$.

Расчет базируется на гипотезах Кирхгофа. Кроме того, предполагают, что существует непрерывный контакт между пластинкой и основанием, а силы трения и сцепления между пластинкой и поверхностью упругого основания отсутствуют. При таких допущениях уравнение (8.16) принимает следующий вид:

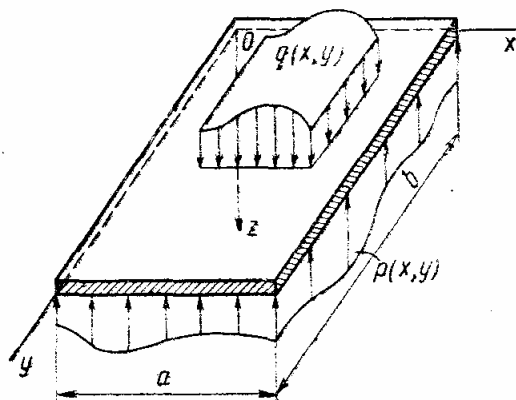


Рис. 62

$$D\nabla^4 w = q - p. \quad (a)$$

Значение реактивного давления на пластинку зависит от перемещения точек основания. В настоящее время существует целый ряд гипотез о связи между функциями $p(x, y)$ и $w(x, y)$. Наиболее простой является гипотеза немецкого ученого Э. Винклера о пропорциональности реактивного давления прогибам в соответствующих точках:

$$p(x, y) = k w(x, y).$$

Она получила большое распространение благодаря своей простоте, но имеет ряд серьезных недостатков и не всегда приводит к правильным результатам.

Подходя к задаче с позиций теории упругости, основание можно рассматривать как упругое полупространство, а в случае плоской задачи — как упругую полуплоскость.

Чтобы установить зависимость между $p(x, y)$ и $w(x, y)$, воспользуемся решением задачи о действии давления $p(x, y)$ на поверхность упругого полупространства. В случае непрерывного распределения давления по нагруженной площади F вертикальные перемещения

точек поверхности упругого полупространства определяются следующей зависимостью [12]:

$$\omega(x, y) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \iint_F \frac{\rho(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}, \quad (6)$$

где ξ и η — координаты центра бесконечно малой нагруженной площади и $d\xi d\eta$ (рис. 63); x и y — координаты точки A , в которой определяется перемещение; E_0 и ν_0 — упругие характеристики основания.

Решение задачи об отыскании функции прогибов $\omega(x, y)$ сводится к решению системы двух — интегрального (а) и дифференциального

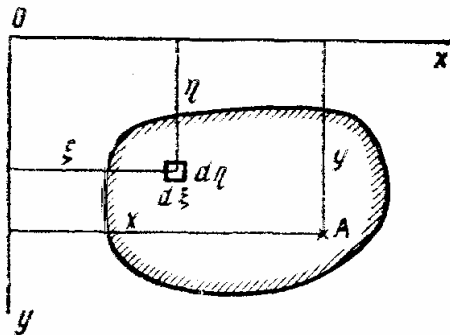


Рис. 63

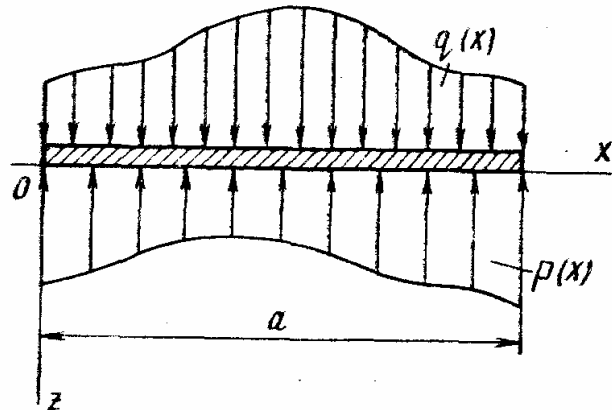


Рис. 64

(б) — уравнений с удовлетворением условий на контуре пластинки. Дальнейший ход расчета связан с вычислением напряжений и деформаций по формулам (8.6) и (8.5).

Примером бесконечной полосы на упругом основании может служить ленточный фундамент. Если нагрузка вдоль фундамента постоянна, то он находится в условиях плоской деформации. Это означает, что достаточно рассмотреть выделенную в поперечном направлении полосу длиной a и шириной, равной единице (рис. 64).

Для такой полоски дифференциальное уравнение прогибов (а) принимает вид

$$EJ \frac{d^4 \omega}{dx^4} = q(x) - p(x). \quad (в)$$

Зависимость (б) между прогибами и реактивным давлением преобразуется к следующей:

$$\omega(x) = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \int_0^a \frac{\rho(\xi) d\xi}{x - \xi}. \quad (г)$$

Сюда входят упругие постоянные $E_1 = E_0 / (1 - \nu_0^2)$, $\nu_1 = \nu_0 / (1 - \nu_0)$, так как рассматривается плоская деформация (см. § 1, гл. VI).

Таким образом, задача об отыскании прогибов бесконечной полосы на упругом основании сведена к решению системы двух интегродифференциальных уравнений (в) и (г).

Решения систем уравнений (а), (б) и (в), (г) получены главным образом в трудах советских ученых. На основании этих решений составлены подробные таблицы для расчета пластинок на упругом основании (см., например, [7]).

§ 11. Основные уравнения изгиба круглой пластинки

Для решения задачи об изгибе круглой пластинки все уравнения изгиба пластинки, выведенные в декартовой системе координат, преобразуем к полярной системе. В этом случае прогиб пластинки и нагрузка являются функциями переменных r и θ , т. е. $w = w(r, \theta)$ и $q = q(r, \theta)$. Тогда согласно зависимостям (7.3) основное уравнение изгиба пластинки (8.15) принимает вид

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q. \quad (8.22)$$

Изгибающие моменты в круглой пластинке будем обозначать так: M_r — изгибающий момент в сечении, перпендикулярном радиус-вектору r в рассматриваемой точке (радиальный изгибающий момент); M_θ — то же в сечении, совпадающем с радиус-вектором (тангенциальный изгибающий момент).

Заменяя в формулах (8.8) производные функции прогибов по x и y на производные по r и θ , получаем формулы изгибающих моментов в полярной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

Аналогично преобразуем формулу крутящего момента (8.10):

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \quad (8.24)$$

Поперечные силы обозначим следующим образом: Q_r — поперечная сила на площадке с нормалью r (радиальная поперечная сила); Q_θ — то же, на площадке, совпадающей с радиус-вектором r (тангенциальная поперечная сила). Заменяя в формулах (8.19) производные, получаем выражения поперечных сил в полярной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w; \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

или

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

Обозначим $Q_r^{\text{прив}}$ интенсивность приведенной поперечной силы на границах контура, перпендикулярных радиус-вектору r , а $Q_\theta^{\text{прив}}$ — на границах, совпадающих с радиус-вектором. Тогда из формул (8.17) и (8.18) после замены переменных x и y на r и θ можно получить выражения приведенной поперечной силы на контуре, учитывающей наличие крутящего момента:

$$Q_r^{\text{прив}} = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta};$$

$$Q_\theta^{\text{прив}} = Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial r}.$$

Подставляя сюда значения поперечных сил (а) и крутящего момента (8.24), находим

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]; \\ Q_\theta^{\text{прив}} &= -D \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

Формулы (8.22)—(8.26) представляют собой основные уравнения изгиба пластинок в полярной системе координат. Уравнение (8.22) служит для определения функции прогибов срединной плоскости пластинки, а остальные — для составления граничных условий и определения усилий.

§ 12. Простейшие осесимметричные задачи изгиба круглой пластинки

Задача об изгибе круглой пластинки будет осесимметричной, если нагрузка на пластинку, а также условия закрепления ее краев не зависят от полярного угла θ . В этом случае прогибы пластинки также не зависят от полярного угла θ , а являются функцией лишь координаты r , т. е. $w = w(r)$. Тогда уравнение (8.22) значительно упрощается:

$$D \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) = q. \quad (8.27)$$

Формулы изгибающих моментов (8.23) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right); \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

а крутящий момент (8.24) обращается в нуль.

Упрощаются и выражения поперечных сил (8.25):

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right); \\ Q_\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

а приведенные поперечные силы на контуре (8.26) составляют

$$Q_r^{\text{прив}} = Q_r; \quad Q_\theta^{\text{прив}} = 0.$$

Уравнение (8.27) можно решить в общем виде. Как известно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения ω_1 и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения $\bar{\omega}$, т. е.

$$\omega = \omega_1 + \bar{\omega}. \quad (\text{a})$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^4 \omega_1}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \omega_1}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \omega_1}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\omega_1}{dr} = 0$$

записывается так:

$$\omega_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r.$$

Чтобы получить частное решение $\bar{\omega}$, уравнение (8.27) можно представить в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

Убедиться в правильности этого уравнения можно, выполнив дифференцирование в его левой части. Дифференцируя функцию, стоящую в круглой скобке, находим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \left(r \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

Дифференцируя функцию, стоящую в прямых скобках, получаем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \left[\frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{d^2 \omega}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

Наконец, дифференцируя функцию, стоящую в фигурных скобках, находим

$$\frac{1}{r} \left\{ r \frac{d^4 \omega}{dr^4} + \frac{d^3 \omega}{dr^3} + \frac{d^3 \omega}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

или

$$\frac{d^4 \omega}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \omega}{dr^3} - \frac{1}{r} \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d\omega}{dr} = \frac{q(r)}{D},$$

что совпадает с уравнением (8.27).

Интегрируя это уравнение последовательно четыре раза, найдем общий вид частного решения:

$$\bar{w} = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r r \left[\int_0^r \frac{1}{r} \left(\int_0^r q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr. \quad (6)$$

Пусть нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластинки, т. е. $q(r) = q = \text{const}$. В этом случае выражение (6) легко интегрируется и приводит к следующему результату:

$$\bar{w} = \frac{qr^4}{64D}.$$

Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения (8.27) при равномерно распределенной нагрузке таково:

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}. \quad (8.30)$$

Рассмотрим некоторые примеры расчета пластинок, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки.

1. *Скругленная шарнирно опертая по контуру пластинка* (рис. 65). Для определения постоянных интегрирования имеем следующие граничные условия. В центре пластинки (при $r = 0$) прогиб должен иметь конечное значение. Так как $\ln 0 = -\infty$, то в решении (8.30) следует отбросить члены, содержащие множитель $\ln r$, т. е. принять

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Тогда

$$w = C_1 + C_3 r^2 + qr^4/(64D). \quad (в)$$

Два условия имеем на контуре пластинки, где должны обращаться в нуль прогиб w и радиальный изгибающий момент M_r . Таким образом, при $r = a$

$$w = 0 \text{ и } \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} = 0. \quad (г)$$

Подставляя в условия (г) функцию прогибов (в), получаем:

$$C_1 + C_3 a^2 + \frac{qa^4}{64D} = 0;$$

$$2C_3 + \frac{3qa^2}{16D} + \frac{\nu}{a} \left(2C_3 a + \frac{qa^3}{16D} \right) = 0.$$

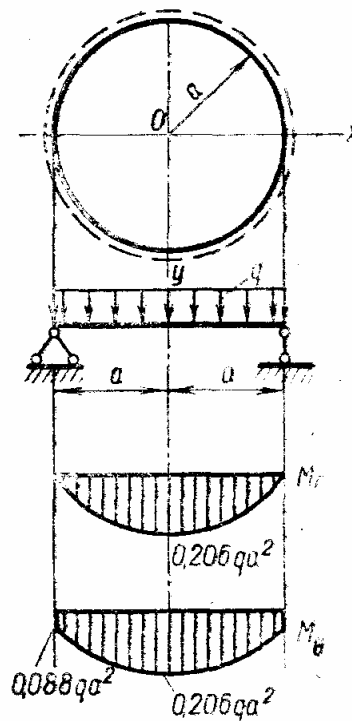


Рис. 65

откуда

$$C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{qa^2}{32D};$$

$$C_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{32D} - \frac{qa^4}{64D}.$$

Подставляя найденные постоянные в решение (в), получаем функцию прогибов для рассматриваемой пластинки:

$$\omega = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right). \quad (8.31)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки (при $r = 0$):

$$\max \omega = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{qa^4}{64D}. \quad (д)$$

Подставляя функцию прогибов (8.31) в формулы (8.28), находим изгибающие моменты в пластинке:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= q(3+\nu)(a^2 - r^2)/16; \\ M_\theta &= q[(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2]/16. \end{aligned} \right\} (8.32)$$

Максимальные изгибающие моменты также возникают в центре пластинки:

$$\max M_r = \max M_\theta = qa^2(3+\nu)/16.$$

Изгибающие моменты в точках контура (при $r = a$):

$$\begin{aligned} M_r &= 0; \\ M_\theta &= qa^2(1-\nu)/8. \end{aligned}$$

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$, показаны на рис. 65.

2. *Сплошная защемленная по контуру пластинка* (рис. 66). Для определения постоянных C_1 и C_3 имеем следующие граничные условия: на внешнем контуре пластинки должны отсутствовать прогибы и повороты сечений, т. е.

$$\text{при } r = a \quad \omega = \frac{d\omega}{dr} = 0.$$

Подставляя в эти условия функцию прогибов (в), получаем:

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 a^2 + qa^4/(64D) &= 0; \\ 2C_3 a + qa^3/(16D) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} C_3 &= -qa^2/(32D), \\ C_1 &= qa^4/(64D), \end{aligned}$$

и уравнение срединной поверхности (в) принимает вид

$$\omega = [q/(64D)] (a^2 - r^2)^2. \quad (8.33)$$

Максимальный прогиб в центре пластинки (при $r = 0$)

$$\max \omega = qa^4/(64D).$$

Из сравнения этого результата с формулой (д) следует, что максимальный прогиб защемленной по контуру пластинки в четыре раза меньше максимального прогиба шарнирно опертой пластинки.

Подставляя функцию прогибов (8.33) в формулы (8.28), находим изгибающие моменты:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= q[(1 + \nu)a^2 - (3 + \nu)r^2]/16; \\ M_\theta &= q[(1 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2]/16. \end{aligned} \right\} (8.34)$$

Изгибающие моменты в центре пластинки:

$$M_r = M_\theta = qa^2(1 + \nu)/16;$$

на контуре:

$$M_r = -qa^2/8;$$

$$M_\theta = -\nu qa^2/8.$$

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$, показаны на рис. 66. Максимальный по абсолютному значению изгибающий момент возникает в точках контура на площадках, перпендикулярных радиусу. Он на 40% меньше максимального изгибающего момента в шарнирно опертой пластинке.

3. Кольцевая пластинка с защемленным наружным краем (рис. 67). Для определения постоянных интегрирования, входящих в решение (8.30), имеем следующие граничные условия: на внешнем, защемленном краю (при $r = a$)

$$\omega = \frac{d\omega}{dr} = 0;$$

на внутреннем, свободном краю (при $r = b$)

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = 0$$

$$\text{и } Q_r^{\text{прив}} = Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = 0.$$

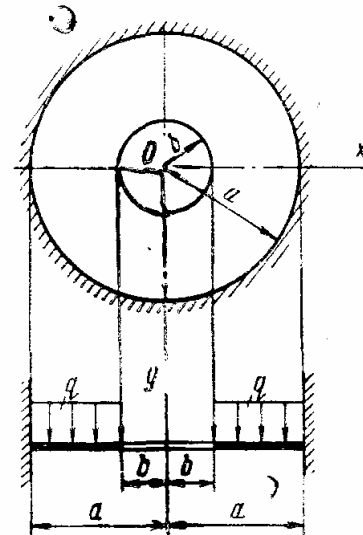


Рис. 67

Подставляя в эти условия функцию прогибов (8.30), получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a + qa^4/(64D) &= 0; \\ C_2/a + 2C_3 a + 2C_4 a \ln a + C_4 a + qa^3/(16D) &= 0; \\ -C_2/b^2 + 2C_3 + 2C_4 \ln b + 3C_4 + 3qb^2/(16D) + \\ + \nu [C_2/b^2 + 2C_3 + 2C_4 \ln b + C_4 + qb^2/(16D)] &= 0; \\ 4C_4/b + qb/(2D) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, находим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= [qa^2/(64D\alpha)] \{ (1-\nu) a^4 - [(5-3\nu) - 4(1+\nu) \ln a] a^2 b^2 - \\ &\quad - 2[2(1+\nu) + (1-2 \ln a)((1-\nu) + 4(1+\nu) \ln(b/a))] b^4 \}; \\ C_2 &= -[qa^3 b^2/(16D\alpha)] \{ (1-\nu) a^2 + [(1-\nu) + 4(1+\nu) \ln(b/a)] b^2 \}; \\ C_3 &= [q/(32D\alpha)] \{ -(1-\nu) a^4 + 2(1-\nu)(1+2 \ln a) a^2 b^2 + \\ &\quad + [(3+\nu) + 4(1+\nu) \ln b] b^4 \}; \\ C_4 &= -qb^2/(8D), \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

где

$$\alpha = (1-\nu) a^2 + (1+\nu) b^2.$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \rho &= r/a, \quad \beta = b/a, \\ k &= \frac{(1-\nu) \beta^2 + (1+\nu)(1+4\beta^2 \ln \beta)}{(1-\nu) + (1+\nu) \beta^2} \beta^2, \end{aligned}$$

то уравнение срединной поверхности пластинки (8.30) после подстановки в него постоянных (e) примет следующий вид:

$$\omega = [qa^4/(64D)] \{ -1 + 2(1-k-2\beta^2)(1-\rho^2) + \rho^4 - 4k \ln \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho \}. \quad (8.35)$$

Дальнейший ход расчета, т. е. определение усилий и напряжений, не представляет затруднений и производится аналогично предыдущим примерам.

§ 13. Понятие о расчете гибких пластинок

Тонкие пластинки, имеющие прогибы более четверти своей толщины, называются гибкими. Для них гипотеза о недеформируемости срединной плоскости оказывается несправедливой, так как в ней появляются деформации растяжения, сжатия и сдвига. Кроме того, усилия срединной плоскости гибкой пластинки зависят от ее прогибов.

При больших прогибах точки срединной плоскости получают перемещения u_0 и v_0 вдоль осей x и y (рис. 68). Тогда формулы (8.4) принимают вид

$$u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Точно так же в формулах (8.5) появляются деформации точек срединной плоскости ε_x^0 , ε_y^0 и γ_{xy}^0 :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

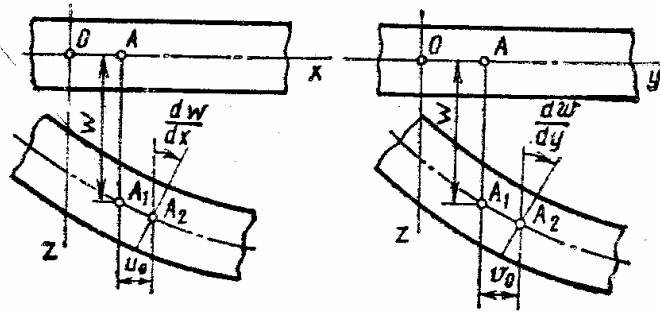


Рис. 68

Эти формулы усложняются еще и тем, что деформации точек срединной плоскости зависят от прогибов нелинейно:

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},\end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

так как в данном случае квадраты производных $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ и $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ имеют тот же порядок малости, что и производные $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_0}{\partial y}$.

Напряжения в гибкой пластинке приводятся не только к изгибающим и крутящим моментам и поперечным силам (8.8), (8.9), (8.10), но и к нормальным и сдвигающим силам в срединной плоскости (рис. 69):

$$\left. \begin{aligned}N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ S_x = S_y = S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right).\end{aligned} \right\}$$

Записанные формулы содержат неизвестные составляющие перемещений точек срединной плоскости u_0 и v_0 . Исключая эти перемещения, получаем уравнение неразрывности деформаций, связывающее усилия в срединной плоскости пластинки:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} (N_x - \nu N_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_y - \nu N_x) - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} &= \\ &= Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].\end{aligned} \quad (a)$$

Составим уравнения равновесия бесконечно малого элемента срединной плоскости гибкой пластинки, находящейся как под действием

поперечных сил (см. рис. 54), так и под действием сил в ее срединной плоскости (рис. 69). Проекция сил на ось x дает

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy - N_x dy + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy\right) dx - S_y dx = 0,$$

откуда после упрощения и деления на $dx dy$ находим

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Аналогично из уравнения проекций на ось y получаем

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

При проецировании сил на ось z гибкую пластинку следует рассматривать в деформированном состоянии. На рис. 70 показано сечение плоскостью, параллельной xOz , бесконечно малого элемента срединной плоскости пластинки после искривления. В этой плоскости видны силы

$$N_x dy \quad \text{и} \quad \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy,$$

углы наклона которых относительно оси x соответственно равны

$$\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx.$$

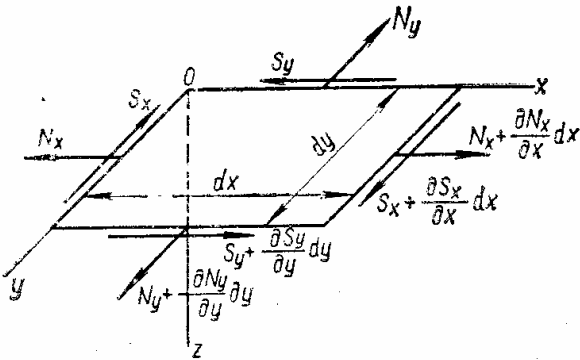


Рис. 69

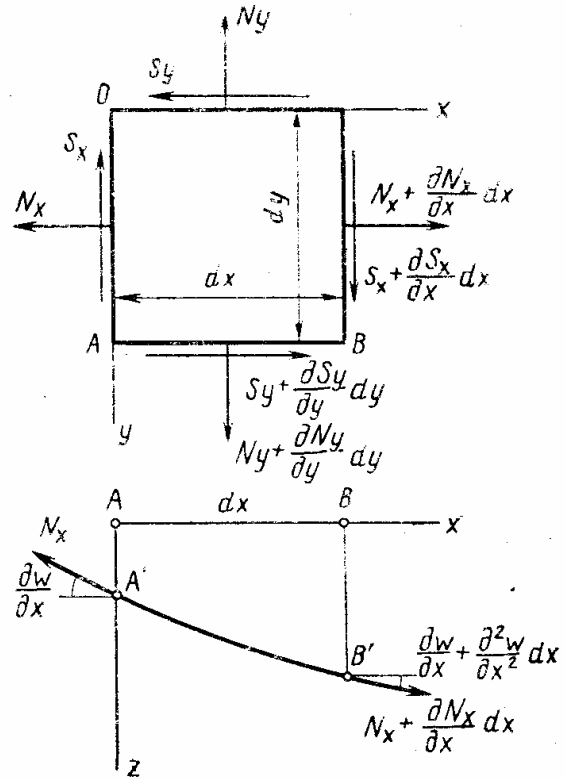


Рис. 70

При проектировании учтем, что косинус малого угла равен единице, а синус — самому углу, т. е. в данной плоскости

$$\sin\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \approx \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\sin\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) \approx \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx.$$

Спроецируем нормальные силы в рассматриваемой плоскости на ось z :

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) - N_x dy \frac{dw}{\partial x}.$$

После упрощения и отбрасывания величин третьего порядка малости получим

$$\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx dy. \quad (\text{г})$$

Аналогично можно получить проекцию на ось z нормальных сил в плоскости yOz :

$$\left(N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}\right) dx dy. \quad (\text{д})$$

Расположение касательных сил после деформации гибкой пластинки показано на рис. 71. На том же рисунке показаны углы, составляемые этими силами с координатной плоскостью xOy . Спроецируем эти силы на ось z :

$$\begin{aligned} &\left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx\right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx\right) - S_x dy \frac{\partial w}{\partial y} + \\ &+ \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy\right) dx \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy\right) - S_y dx \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

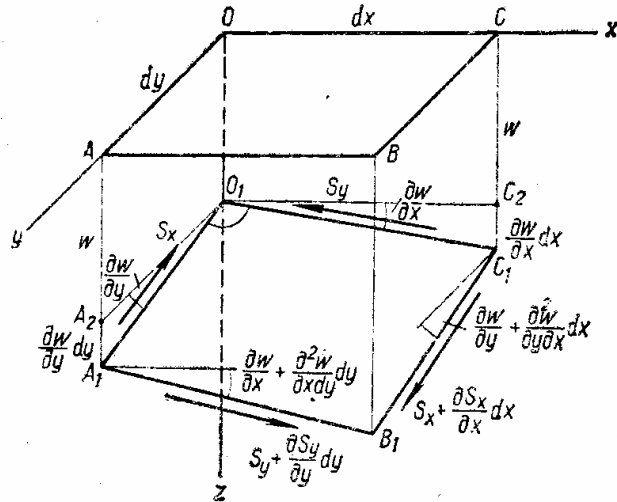


Рис. 71

После упрощения и отбрасывания величин третьего порядка малости с учетом закона парности касательных усилий ($S_x = S_y = S$) получим

$$\left(2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x}\right) dx dy. \quad (\text{е})$$

На проекцию поперечных усилий искривление пластинки не влияет, поэтому берем ее в форме (8.12). Добавляя к этой зависимости проекции (г)—(е), разделенные на $dx dy$, после соответствующей группировки получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ &+ \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y}\right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x}\right) \frac{\partial w}{\partial y} = -q. \end{aligned}$$

Выражения, стоящие в скобках, согласно соотношениям (б) и (в), равны нулю. Подставляя затем и: (8.9) выражения поперечных сил, находим

$$D\nabla^2 \nabla^2 w = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (ж)$$

Если ввести функцию Эри $\varphi(x, y)$ в форме

$$N_x = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad N_y = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad S = -h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (8.37)$$

то уравнения (ж) и (а) примут вид

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^2 \nabla^2 w - hL(w, \varphi) &= q; \\ (\nabla^2 \nabla^2 \varphi)/E + 0,5L(w, \varphi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

Здесь введен оператор

$$L(w, \varphi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (8.39)$$

При этом оператор $L(w, \varphi)$ получается из оператора (8.39) заменой функции φ на функцию w .

Система нелинейных уравнений (8.38), связывающая функцию напряжений в срединной плоскости пластинки и функцию прогибов, выведена немецким ученым Т. Карманом. Совместно с граничными условиями она представляет основную систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластинок. Решение этой системы в общем виде не получено. В настоящее время с помощью теории гибких пластинок получен ряд частных решений для равномерно распределенной поперечной нагрузки, а также для пластинок, теряющих устойчивость при сжатии и сдвиге в их срединной плоскости.

В случае жесткой пластинки, когда прогибы малы по сравнению с ее толщиной, необходимо принять функцию $\varphi = 0$. Тогда система (8.38) сводится к уравнению (8.16).

ГЛАВА IX

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНОК

§ 1. Сущность вариационных методов решения дифференциальных уравнений

Большинство задач теории упругости сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями. Точного решения многих важных для практики задач до сих пор не получено, так как интегрирование дифференциальных уравнений, к которым они приводятся, представляет собой большие математические трудности. Поэтому важное значение приобрели вариационные методы, позволяющие эффективно получать приближенные решения

дифференциальных уравнений с точностью, достаточной для инженерных расчетов.

Сущность вариационных методов заключается в том, что функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению при заданных граничных условиях, заменяют приближенным аналитическим выражением, подбираемым так, чтобы оно наилучшим образом аппроксимировало эту функцию.

В теории изгиба пластинок такой подход позволяет свести интегрирование основного дифференциального уравнения в частных производных к решению системы линейных алгебраических уравнений или к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

Для приведения основного дифференциального уравнения изгиба пластинки (8.16) к системе линейных алгебраических уравнений приближенное значение функции прогибов $\omega_n(x, y)$ можно выбрать в виде ряда с конечным числом членов:

$$\omega_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \Phi_{kl}, \quad (9.1)$$

где $\Phi_{kl}(x, y)$ — линейно независимые функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи; a_{kl} — постоянные параметры, подлежащие определению.

В зависимости от числа членов ряда (9.1) решение может быть получено с любой степенью точности. Параметры a_{kl} выбирают так, чтобы ряд по возможности точнее представлял искомую функцию $\omega(x, y)$.

Из различных вариационных методов рассмотрим два: метод Ритца—Тимошенко и метод Бубнова—Галеркина.

5.2. Метод Ритца — Тимошенко

Метод Ритца—Тимошенко основан на использовании известного из курса теоретической механики принципа возможных перемещений: для равновесия системы, подчиненной идеальным удерживающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к ней сил на всяком возможном перемещении равнялась нулю.

Рассматривая отдельно действие внешних и внутренних сил, принцип возможных перемещений можно представить следующим образом:

$$\delta A - \delta U = 0, \quad (a)$$

где δA — работа внешних сил (объемных и поверхностных) на каком-либо возможном перемещении; δU — работа внутренних сил, представляющая собой приращение потенциальной энергии на том же возможном перемещении с обратным знаком.

Пусть тело находится в равновесии под действием объемных сил, составляющие которых X, Y, Z , и поверхностных сил, составляющие которых X_v, Y_v, Z_v . Обозначим составляющие возможных перемещений $\delta u, \delta v, \delta w$ и подсчитаем работу внешних сил на этих перемещениях. Элементарная работа составляющей объемных сил X , приходящейся на единицу объема, равна произведению этой силы на объем бесконечно

малого элемента $dxdydz$ и на возможное перемещение δu по ее направлению: $Xdx dy dz \delta u$.

Точно так же элементарные работы составляющих объемных сил Y и Z равны соответственно $Ydx dy dz \delta v$, $Zdx dy dz \delta w$.

Работа, производимая объемными силами во всем объеме тела V , равна интегралу по этому объему от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих:

$$\iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dxdydz. \quad (б)$$

Элементарная работа составляющей поверхностных сил X_v , которая действует на бесконечно малый элемент поверхности ds , равна произведению этой составляющей на площадь ds и на возможное перемещение δu в направлении составляющей: $X_v ds \delta u$.

Аналогично определяются и элементарные работы двух других составляющих поверхностных сил: $Y_v ds \delta v$, $Z_v ds \delta w$.

Работа, производимая поверхностными силами, действующими по всей поверхности тела s , равна интегралу по этой поверхности от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих поверхностных сил:

$$\iint_s (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) ds. \quad (в)$$

Таким образом, работа всех внешних сил на возможных перемещениях равна сумме работ объемных (б) и поверхностных (в) сил:

$$\delta A = \iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dxdydz + \iint_s (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) ds. \quad (г)$$

При вычислении возможной работы внешних сил варьировались только перемещения u , v и w , а объемные и поверхностные силы оставались постоянными, поэтому оператор δ в формуле (г) можно вынести за знаки интегралов и за скобки:

$$\delta A = \delta \left[\iiint_V (Xu + Yv + Zw) dxdydz + \iint_s (X_v u + Y_v v + Z_v w) ds \right]. \quad (д)$$

Приращение потенциальной энергии δU подсчитывается согласно интегралу (3.20):

$$\delta U = \iiint_V \delta W dx dy dz, \quad (е)$$

где W — удельная потенциальная энергия, определяемая по формуле (3.18).

Полагая в формуле (а) оператор δ общим для обоих слагаемых, получаем

$$\delta (A - U) = 0. \quad (ж)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой работу всех внешних и внутренних сил, приложенных к телу. Эта разность с про-

тивоположным знаком является потенциальной энергией системы внешних и внутренних сил, действующих на упругое тело:

$$\mathcal{E} = U - A. \quad (9.2)$$

Вводя это обозначение в условие (ж), получаем

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (з)$$

Приращение функции δ с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка равно ее первому дифференциалу, поэтому вместо условия (з) можно написать

$$d\mathcal{E} = 0,$$

а это означает, что потенциальная энергия системы \mathcal{E} имеет экстремальное значение.

В курсе теоретической механики доказывается теорема Лагранжа—Дирихле, на основании которой можно сформулировать следующий принцип минимума потенциальной энергии: из всех мыслимых перемещений упругого тела перемещения, удовлетворяющие условиям устойчивого равновесия, сообщают потенциальной энергии системы минимальное значение.

Таким образом, потенциальная энергия системы (9.2)

$$\mathcal{E} = U - A = \min, \quad (9.3)$$

где потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, определяется по формуле (3.21), а работа объемных и поверхностных сил согласно формуле (д) составляет

$$A = \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dx dy dz + \iint_s (X_v u + Y_v v + Z_v w) ds. \quad (и)$$

При изгибе пластинки объемными силами пренебрегают, а из составляющих поверхностных сил отлична от нуля только одна: $Z_v = q$. Подставляя это значение в формулу (и) и принимая элемент поверхности ds в виде прямоугольника со сторонами dx и dy , получаем выражение работы внешних сил при изгибе пластинки:

$$A = \iint_s q w dx dy. \quad (9.4)$$

Если приближенное значение функции прогибов выбирать в виде ряда (9.1), то после подстановки этого значения в формулу (9.3) потенциальная энергия системы окажется функцией параметров a_{kl} :

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(a_{kl}).$$

Определим вид этой функции. Подставив функцию прогибов (9.1) в формулы (8.5) и (8.6), можно убедиться, что составляющие деформации и напряжений являются линейными функциями параметров a_{kl} . Подставляя составляющие деформации и напряжений в формулу (3.21), убеждаемся, что потенциальная энергия U_n является квадратичной функцией этих параметров. Подставляя функцию прогибов (9.1) в формулу (9.4), можно убедиться, что работа внешних сил A_n

в пластинке является линейной функцией параметров a_{kl} . После подстановки выражений U_n и A_n в формулу (9.3) убеждаемся, что потенциальная энергия системы \mathcal{E}_n является квадратичной функцией этих параметров.

Чтобы найти значения параметров a_{kl} , соответствующие минимуму потенциальной энергии системы, нужно приравнять нулю частные производные:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial a_{kl}} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n; \quad l = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (9.5)$$

Производная квадратичной функции параметров оказывается линейной функцией этих параметров, поэтому условие (9.5) представляет собой систему n^2 линейных уравнений относительно параметров a_{kl} .

Таким образом, метод Ритца—Тимошенко позволяет заменить задачу о нахождении решения дифференциального уравнения изгиба пластинки (8.16) задачей о нахождении минимума потенциальной энергии. Такая замена возможна в связи с тем, что и указанное дифференциальное уравнение и вариационное уравнение (з) являются уравнениями равновесия упругого тела. Покажем, что последнее включает в себя дифференциальные уравнения равновесия и условия на поверхности. Рассматривая уравнение (з) в форме

$$\delta \mathcal{E} = \delta U - \delta A = 0, \quad (к)$$

внесем в него выражения потенциальной энергии (3.20) и (3.16), возможную работу всех внешних сил (г) и учтем, что

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_x &= \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u); \\ &\dots \dots \dots \\ \delta \gamma_{xy} &= \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v); \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} &\iiint_V \left\{ \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} (\delta v) + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z} (\delta w) + \tau_{xy} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\delta u) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) \right] + \tau_{yz} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta w) \right] + \tau_{zx} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\delta w) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\delta u) \right] \right\} dx dy dz - \iiint_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz - \\ &\quad - \iint_{\Sigma} (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) ds = 0. \quad (л) \end{aligned}$$

Обратимся в уравнении (л) к первому из тройных интегралов и произведем интегрирование по переменной x . Интегрируя по частям, находим

$$\iiint_V \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) dx dy dz = \iint_s \sigma_x \delta u dy dz - \iiint_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u dx dy dz. \quad (м)$$

Первый интеграл в правой части равенства (м) является поверхностным интегралом второго типа. Его можно преобразовать в поверхностный интеграл первого типа по известной из курса математического анализа формуле

$$\iint_s (P dy dz + Q dz dx + R dx dy) = \iint_s (Pl + Qm + Rn) ds. \quad (н)$$

Здесь функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ должны быть непрерывными вместе с первыми частными производными внутри объема V , ограниченного поверхностью s ; l, m, n — направляющие косинусы нормали к этой поверхности.

Используя преобразование (н), вместо формулы (м) получаем

$$\iiint_V \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) dx dy dz = \iint_s \sigma_x l \delta u ds - \iiint_V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u dx dy dz.$$

Аналогично преобразуются и остальные восемь первых тройных интегралов в уравнении (л). После преобразования и группировки по составляющим возможных перемещений вместо уравнения (л) получаем

$$\begin{aligned} & \iint_s (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - X_v) \delta u + (\tau_{yx} l + \sigma_y m + \\ & + \tau_{yz} n - Y_v) \delta v + (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - Z_v) \delta w] ds - \\ & - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \right] dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

В записанном уравнении возможные перемещения $\delta u, \delta v, \delta w$ между собой не связаны, поэтому, чтобы оно обращалось в тождество при любых значениях возможных перемещений, должны обращаться в нуль коэффициенты при возможных перемещениях, стоящие в скобках. Следовательно, получаем шесть уравнений: три первых уравнения представляют собой условия на поверхности (4.2), а три других — дифференциальные уравнения равновесия (4.1). Таким образом, вариационное уравнение (к) включает в себе дифференциальные уравнения равновесия и статические граничные условия. Отсюда следует, что при использовании этого уравнения для приближенного решения задач выбранная функция φ_{kl} обязательно должна удовлетворять только геометрическим граничным условиям. Статические граничные ус-

ловия и основное дифференциальное уравнение задачи удовлетворяются автоматически.

Итак, решение задачи об изгибе пластинки методом Ритца—Тимошенко состоит в следующем. Принимаем приближенное значение функции прогибов $w(x, y)$ в форме двойного ряда

$$w_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \Phi_{kl}(x, y), \quad (o)$$

причем функции Φ_{kl} должны удовлетворять геометрическим граничным условиям. Вычисляем приближенное значение потенциальной энергии в пластинке U_n , для чего ниже получена формула (9.11). По формуле (9.4) вычисляем работу внешних сил A_n , а по формуле (9.3) — потенциальную энергию системы \mathcal{E}_n . Для определения параметров a_{kl} используем систему уравнений (9.5). Найденные параметры подставляем в функцию прогибов (o) и получаем искомое приближенное решение.

Следует заметить, что, хотя удовлетворение статических граничных условий в методе Ритца—Тимошенко не обязательно, функции Φ_{kl} лучше по возможности выбирать так, чтобы они удовлетворяли всем граничным условиям — геометрическим и статическим. В этом случае ряд быстрее сходится к точному решению и при вычислениях бывает достаточно ограничиться одним-двумя членами ряда.

§ 3. Метод Бубнова — Галеркина

Метод Бубнова—Галеркина основан на свойстве *ортogonalных* функций. В курсе математического анализа дается следующее определение ортogonalных функций: если имеется семейство непрерывных функций

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x), \psi_l(x), \dots, \psi_n(x) \quad (a)$$

и интеграл произведения любых двух различных функций этого семейства в промежутке $[a, b]$ равен нулю:

$$\int_a^b \psi_k(x) \psi_l(x) dx = 0, \quad (9.6)$$

то функции (a) образуют в этом промежутке ортogonalную систему. Например, семейство тригонометрических функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx \quad (6)$$

является ортogonalной системой в промежутке $[-\pi, +\pi]$.

Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx \, dx &= 0 \quad (k \neq l); \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lx \, dx &= 0 \quad (k \neq l); \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos lx \, dx &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

причем эти интегралы исчерпывают всевозможные варианты комбинирования двух различных функций семейства (б).

На основании леммы из курса математического анализа следует: если одна из функций тождественно равна нулю, например $\psi_k(x) \equiv 0$, то она ортогональна ко всем без исключения функциям, так как в этом случае выполняется условие (9.6). В качестве примера можно привести функцию

$$\psi_k(x) = EJ\omega^{IV} - q, \quad (\text{г})$$

представляющую собой левую часть дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Эта функция тождественно равна нулю при любых значениях x , и, следовательно,

$$\int_L (EJ\omega^{IV} - q) \psi_l(x) \, dx \equiv 0.$$

Здесь интеграл берется по всей длине балки L , и поэтому функция (г) ортогональна в промежутке $[0, L]$ к любой функции.

Если функцию прогибов $\omega(x)$ заменить ее приближенным выражением в форме ряда

$$\omega_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \quad (\text{д})$$

то функция (г) уже не будет тождественно равна нулю, а значит, и не будет ортогональна в указанном промежутке к любой функции. Можно, однако, потребовать, чтобы она была ортогональна хотя бы к ограниченному классу функций, например функций φ_i , составляющих ряд (д), т. е. чтобы

$$\int_0^L (EJ\omega_n^{IV} - q) \varphi_i \, dx = 0 \quad (\text{е})$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

В результате получим n линейных уравнений для определения n постоянных коэффициентов a_i , входящих в ряд (д).

На использовании системы уравнений (е) для определения значений параметров a_i и основан метод Бубнова—Галеркина. Все рассуждения, приведенные для функции одного аргумента, можно применить

и к функциям двух аргументов и более. Для решения задачи об изгибе пластинок уравнения Бубнова—Галеркина (е) можно представить в виде

$$\iint_s (D\nabla^4 \omega_n - q) \varphi_{kl} dx dy = 0 \quad (9.7)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n; l = 1, 2, 3, \dots, n),$$

где вместо линейного промежутка рассматривается плоская область s , ограниченная контуром пластинки, а функция ω_n выражается следующим двойным рядом по области s :

$$\omega_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \varphi_{kl}(x, y). \quad (ж)$$

Таким образом, приближенная функция в уравнениях (9.7), представляющая собой левую часть дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластинки (8.16), ортогональна в области s ко всем функциям φ_{kl} ряда (ж), входящим в эту приближенную функцию.

Методу Бубнова—Галеркина можно дать и другое толкование. Функция $D\nabla^4 \omega_n - q$ представляет собой проекцию на ось z всех внешних и внутренних сил, действующих на бесконечно малый элемент пластинки. Функция прогибов ω_n есть перемещение в направлении той же оси. Значит, функции φ_{kl} тоже являются перемещениями в направлении оси z и их можно считать возможными перемещениями. Следовательно, уравнения Бубнова—Галеркина (9.7) приближенно выражают равенство нулю работы всех внешних и внутренних сил в пластинке на возможных перемещениях φ_{kl} .

Таким образом, метод Бубнова—Галеркина, как и метод Ритца—Тимошенко, исходит из принципа возможных перемещений, поэтому оба метода равноправны. В обоих случаях аппроксимирующую функцию необходимо выбирать так, чтобы она удовлетворяла геометрическим граничным условиям. Выполнение статических условий не обязательно.

§ 4. Метод Власова

Из вариационных методов приведения дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям остановимся еще на методе В. З. Власова.

В исследуемой пластинке будем различать два направления: поперечное, совпадающее с направлением оси Ox , и продольное, совпадающее с направлением оси Oy . На продольных краях могут быть заданы граничные условия, как геометрические, так и статические, всего по два условия на каждом краю. При любом $y = \text{const}$ функция прогибов пластинки $\omega(x, y)$ описывает непрерывную изогнутую линию $\omega(x)$, удовлетворяющую на концах (на продольных краях пластинки) заданным геометрическим граничным условиям. Пусть эта линия представлена с помощью n линейно независимых функций $\chi_k(x)$, удов-

летворяющих тем же геометрическим граничным условиям, что и $w(x)$, т. е.

$$w(x) = \lambda_1 \chi_1(x) + \lambda_2 \chi_2(x) + \dots + \lambda_n \chi_n(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_k(x). \quad (a)$$

Функции $\chi_k(x)$ являются безразмерными, а коэффициенты λ_k имеют размерность прогиба w .

Переходя от линии $y = \text{const}$ к другой, смежной с ней, замечаем, что вследствие непрерывности функции $w(x, y)$ значения числовых коэффициентов λ_k будут меняться как непрерывные функции y . Следовательно, функция прогибов может быть представлена в виде разложения

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^n W_k(y) \chi_k(x). \quad (б)$$

Одну из двух систем функций — $W_k(y)$ или $\chi_k(x)$ — можно выбрать заранее и в дальнейшем считать заданной. Будем считать таковой систему безразмерных функций $\chi_k(x)$. Тогда функции $W_k(y)$, имеющие размерность прогиба, будут искомыми коэффициентами разложения. В соответствии с размерностями и физическим смыслом формулы (б) функции $W_k(y)$ называются *обобщенными прогибами*, а $\chi_k(x)$ — *функциями поперечного распределения прогибов*.

Представление изогнутой срединной поверхности пластинки в виде разложения (б) при конечном числе n означает, что пластинка заменена системой с конечным числом степеней свободы в поперечном направлении при сохранении бесконечного числа степеней свободы в продольном направлении. Это означает также приведение двумерной задачи изгиба пластинки к одномерной, ибо после того, как найдены все n функций $W_k(y)$, значения прогибов $w(x, y)$ будут определены с известной степенью точности.

Выбор функции прогибов $w(x, y)$ в виде конечного ряда (б) предполагает приближенное решение задачи. В общем случае функция (б) не будет удовлетворять уравнению (8.15). Поэтому для определения функций $W_k(y)$ воспользуемся вариационным методом Бубнова—Галеркина. Вариационное уравнение (9.7) для решаемой задачи при расположении осей, согласно рис. 54, можно записать в такой форме:

$$\int_0^a \left[D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q \right] \chi_i(x) dx = 0 \quad (в)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Применяя интегрирование по частям, выражение (в) представим в виде

$$D \left\{ \left| \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \chi_i \right|_0^a - \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \chi_i' \right|_0^a + \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \chi_i'' dx + 2 \left| \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \chi_i \right|_0^a - \right.$$

$$\left. - 2 \int_0^a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \chi_i' dx + \int_0^a \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \chi_i dx \right\} - \int_0^a q \chi_i dx = 0. \quad (г)$$

Согласно формулам (8.8) и (8.19), разность значений изгибающих моментов M_x и приведенных поперечных сил $Q_x^{\text{прив}}$, вычисленных для краевых сечений пластинки ($x = 0; x = a$), составит:

$$M_x \Big|_0^a = -D \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_0^a;$$

$$Q_x^{\text{прив}} \Big|_0^a = -D \left| \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right|_0^a.$$

Учитывая эти зависимости, уравнение (г) можно несколько упростить:

$$D \left\{ \int_0^a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \chi_i'' dx - 2 \int_0^a \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \chi_i' dx + \nu \left| \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \chi_i \right|_0^a + \nu \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \chi_i' \right|_0^a + \right. \\ \left. + \int_0^a \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \chi_i dx \right\} - \int_0^a q \chi_i dx + \left| M_x \chi_i' \right|_0^a - \left| Q_x^{\text{прив}} \chi_i \right|_0^a = 0. \quad (\text{д})$$

Входящие в это уравнение члены $\left| M_x \chi_i' \right|_0^a$ и $-\left| Q_x^{\text{прив}} \chi_i \right|_0^a$ представляют собой снесенную к единице длины работу краевых изгибающих моментов и приведенных поперечных сил, приложенных в сечениях $x = 0$ и $x = a$. Причисляя эту работу к суммарной работе внешней нагрузки q и подставляя функцию (б), получим вариационное уравнение равновесия (д) в окончательном виде:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} W_k^{IV} - 2 \sum_{k=1}^n \beta_{ik} W_k'' + \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} W_k - \frac{G_i}{D} = 0 \quad (9.8)$$

($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Входящие сюда коэффициенты вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ik} &= \int_0^a \chi_k \chi_i dx; \\ \beta_{ik} &= \int_0^a \chi_k' \chi_i' dx - \frac{\nu}{2} \left| \chi_k \chi_i' + \chi_k' \chi_i \right|_0^a; \\ \gamma_{ik} &= \int_0^a \chi_k'' \chi_i'' dx, \end{aligned} \right\} \quad (\text{е})$$

а свободные члены — по формуле

$$G_i = \int_0^a q \chi_i dx - \left| M_x \chi_i' \right|_0^a + \left| Q_x \chi_i \right|_0^a. \quad (\text{ж})$$

Коэффициенты α_{ik} , β_{ik} , γ_{ik} определяются только выбранной системой функций поперечного распределения прогибов $\chi_i(x)$. Они обладают свойством взаимности:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}; \quad \beta_{ik} = \beta_{ki}; \quad \gamma_{ik} = \gamma_{ki}. \quad (\text{з})$$

Если продольные края пластинки закреплены от прогибов, то формулы (е) принимают вид

$$\alpha_{ik} = \int_0^a \chi_k \chi_i dx; \quad \beta_{ik} = \int_0^a \chi_k' \chi_i' dx; \quad \gamma_{ik} = \int_0^a \chi_k'' \chi_i'' dx.$$

Давая индексу i в уравнении (9.8) различные значения от 1 до n , получим для определения n неизвестных функций W_k полную систему n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Все уравнения будут четвертого порядка относительно каждой искомой функции W_k . Благодаря свойству взаимности коэффициентов (з) система уравнений будет иметь симметричную структуру.

Наиболее эффективным методом интегрирования таких систем является метод, позволяющий привести систему уравнений к одному эквивалентному ей дифференциальному уравнению. В данном случае им будет уравнение порядка $4n$. Отсюда следует, что к уравнениям (9.8) должны быть присоединены $4n$ граничных условия на поперечных краях.

Решив систему уравнений (9.8) при заданных граничных условиях на поперечных краях, получим выражения для всех функций $W_k(y)$ и тем самым согласно разложению (б) определим функцию прогибов $w(x, y)$.

Для определения усилий в пластинке преобразуем формулы (8.8), (8.9), (8.10) и (8.19), подставив в них функцию (б):

$$\begin{aligned} M_x &= -D \sum_{k=1}^n (W_k \chi_k'' + \nu W_k'' \chi_k); \\ M_y &= -D \sum_{k=1}^n (W_k'' \chi_k + \nu W_k \chi_k''); \\ Q_x &= -D \sum_{k=1}^n (W_k \chi_k''' + W_k'' \chi_k'); \\ Q_y &= -D \sum_{k=1}^n (W_k' \chi_k'' + W_k''' \chi_k); \\ H &= -D(1-\nu) \sum_{k=1}^n W_k' \chi_k'; \\ Q_x^{\text{пнв}} &= -D \sum_{k=1}^n [W_k \chi_k''' + (2-\nu) W_k'' \chi_k']; \\ Q_y^{\text{пнв}} &= -D \sum_{k=1}^n [W_k''' \chi_k + (2-\nu) W_k' \chi_k'']. \end{aligned} \quad (9.9)$$

В заключение остановимся на выборе функций поперечного распределения прогибов. Они аппроксимируют деформации произвольной поперечной полочки, вырезанной из пластинки, и могут быть выбраны

различными способами, но должны удовлетворять геометрическим граничным условиям на продольных краях пластинки и быть линейно независимыми.

За функции $\chi_k(x)$ можно принимать фундаментальные функции поперечных колебаний балки постоянного сечения. Например, при шарнирном опирании обоих продольных краев и нагрузке, симметричной относительно плоскости $x = a/2$,

$$\omega = W_1(y) \sin(\pi x/a) + W_3(y) \sin(3\pi x/a) + W_5(y) \sin(5\pi x/a) + \dots,$$

а при кососимметричной нагрузке

$$\omega = W_2(y) \sin(2\pi x/a) + W_4(y) \sin(4\pi x/a) + W_6(y) \sin(6\pi x/a) + \dots$$

Если продольные края пластинки свободны от опирания, то при симметричной нагрузке

$$\omega = W_0(y) \cdot 1 + W_1(y) \sin(\pi x/a) + W_3(y) \sin(3\pi x/a) + \dots,$$

а при кососимметричной

$$\omega = W_0(y) (2x/a - 1) + W_2(y) \sin(2\pi x/a) + W_4(y) \sin(4\pi x/a) + \dots$$

Если край $x = 0$, шарнирно оперт, а край $x = a$ свободен от опирания, то

$$\omega = W_0(y) x/a + W_1(y) \sin(\pi x/a) + W_2(y) \sin(2\pi x/a) + \\ + W_3(y) \sin(3\pi x/a) + \dots$$

Можно построить функции $\chi_k(x)$ статическим путем. Для этого следует рассмотреть элементарную полосу пластинки dy как обыкновенную балку и для этой балки в соответствии с заданными граничными условиями определить изогнутую ось от той или иной поперечной нагрузки. Видоизменяя нагрузку, получим различные формы изгиба балки, т. е. различные функции $\chi_k(x)$.

§ 5. Потенциальная энергия при изгибе пластинки

Выведем формулу для определения потенциальной энергии, накапливающейся при изгибе пластинки. Согласно принятым гипотезам (см. § 1, гл. VIII, $\sigma_z = 0$ и $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$, поэтому формула удельной потенциальной энергии (3.18) принимает вид

$$W = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})/2.$$

Внося сюда выражения напряжений (8.6) и деформаций (8.5), получаем

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Прибавим и вычтем из выражения в квадратных скобках величину $2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$.

После группировки получаем

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\},$$

или

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}.$$

Подставим полученное выражение удельной потенциальной энергии в формулу (3.20). Так как прогибы пластинки являются функциями только двух переменных x и y , то в тройном интеграле можно отделить интегрирование по z :

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iint_s \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz.$$

Интегрируя и вводя цилиндрическую жесткость (8.7), получаем

$$U = \frac{D}{2} \iint_s \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (9.10)$$

Здесь двойной интеграл берется по всей площади срединной поверхности пластинки.

Для некоторых случаев закрепления пластинки выражение потенциальной энергии (9.10) можно упростить. Возьмем интеграл от последнего слагаемого в квадратных скобках и преобразуем его следующим образом:

$$J = \iint_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = \int dx \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy. \quad (a)$$

В последнем выражении проведем интегрирование по частям:

$$J = \int dx \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \int \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dy \right) = \oint_L \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \iint_s \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dx dy. \quad (b)$$

Первый из входящих сюда интегралов — контурный, так как подынтегральная функция есть результат интегрирования по y и, следовательно, в нее входят значения производных функции прогибов на контуре, параллельном оси x . Интегрирование в этом контурном интеграле ведется вдоль того же контура пластинки. Второй интеграл в формуле (б) преобразуем еще раз:

$$\iint_s \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dx dy = \int dy \int \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dx$$

и проинтегрируем по частям. Тогда интеграл (а) примет такой вид:

$$J = \oint_L \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \oint_L \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} dy + \iint_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \quad (в)$$

Во втором из полученных контурных интегралов интегрирование ведется вдоль контура пластинки, параллельного оси y .

Если пластинка произвольного очертания закреплена по контуру, то во всех точках контура прогиб и углы поворота срединной плоскости равны нулю, т. е. $w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Следовательно, оба контурных интеграла в выражении (в) обращаются в нуль, так как в них входит множителем производная $\frac{\partial w}{\partial x}$.

Если прямоугольная пластинка шарнирно оперта по всему контуру (см. рис. 58), то во всех точках контура прогиб $w = 0$. На краях OA и BC , параллельных оси x , искривление вдоль оси x невозможно, если пластинка плотно прилегает к опоре. Таким образом, на этих краях во всех точках $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, а значит, первый контурный интеграл в формуле (в) обращается в нуль. На краях OB и AC невозможно искривление вдоль оси y , т. е. в этом направлении углы поворота и кривизна срединной плоскости равны нулю: $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, и второй контурный интеграл в формуле (в) тоже обращается в нуль.

Таким образом, в двух рассмотренных случаях интеграл (в) приводится к виду

$$J = \iint_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy.$$

После его подстановки в формулу потенциальной энергии (9.10) выражение, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль и формула упрощается:

$$U = \frac{D}{2} \iint_s (\nabla^2 w)^2 dx dy \quad (9.11)$$

Полученное выражение можно использовать для определения потенциальной энергии при изгибе пластинок любого очертания, закрепленных по контуру, а прямоугольных пластинок — еще и шарнирно опертых по контуру.

§ 6. Пример решения задачи методом Ритца — Тимошенко

Для иллюстрации метода Ритца—Тимошенко рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 72). Приближенное выражение функции прогибов принимаем в виде ряда

$$w_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}, \quad (а)$$

где функции

$$\varphi_{kl} = \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b},$$

как показано в § 8 гл. VIII, удовлетворяют всем граничным условиям шарнирного опирания пластинки — и геометрическим, и статическим.

Для вычисления коэффициентов ряда a_{kl} определим потенциальную энергию системы внешних и внутренних сил (9.2). Предварительно подсчитаем оператор Лапласа над функцией $w_n(x, y)$:

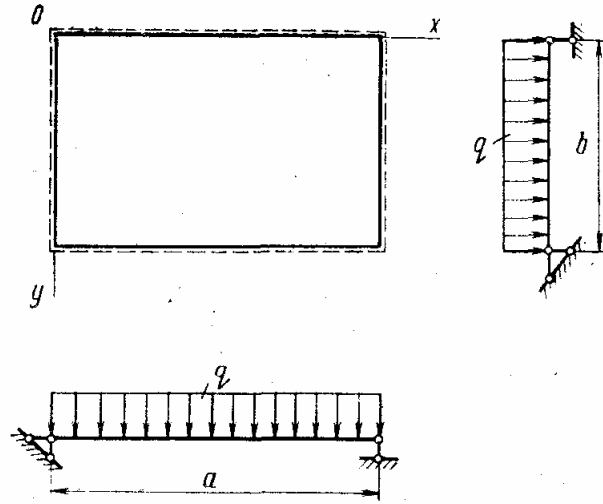


Рис. 72

$$\nabla^2 w_n = \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} = -\pi^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}$$

и подставим это выражение в формулу (9.11):

$$U_n = \frac{\pi^4 D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right]^2 dx dy. \quad (6)$$

Возведение в квадрат двойного ряда равносильно перемножению двух многочленов, где каждый член первого ряда умножается на каждый член второго ряда. Чтобы отличить члены одного ряда от членов другого, в одном из них индексы k и l заменим соответственно на c и d . Тогда выражение, стоящее в квадратных скобках под интегралом в формуле (6), преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right]^2 = \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \times \right. \\ & \left. \times \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right] \left[\sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n a_{cd} \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \sin \frac{c\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b} \right] = \\ & = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n a_{kl} a_{cd} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \times \\ & \quad \times \sin \frac{c\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Подставим этот ряд в формулу (6). Меняя порядок интегрирования и суммирования, а также вынося постоянные величины за знак инте-

гала, получаем

$$U_n = \frac{\pi^4 D}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n a_{kl} a_{cd} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \times \\ \times \sin \frac{c\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{d\pi y}{b} dy. \quad (B)$$

Исследуем входящие сюда интегралы. Первый из них

$$\int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{c\pi x}{a} dx \begin{cases} = 0 & \text{при } k \neq c; \\ \neq 0 & \text{при } k = c, \end{cases}$$

т. е. этот интеграл отличен от нуля только при $k = c$. В этом случае он равен

$$\int_0^a \sin^2 \frac{k\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}.$$

Аналогично, второй интеграл

$$\int_0^b \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{d\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq d; \\ b/2 & \text{при } l = d. \end{cases}$$

Подставляя ненулевые значения интегралов в формулу (B) и учитывая, что они отличны от нуля только при значениях индексов суммирования $c = k$ и $d = l$, находим

$$U_n = \frac{\pi^4 Dab}{8} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2. \quad (Г)$$

Работу внешних сил при изгибе пластинки под действием поперечной нагрузки можно подсчитать по формуле (9.4). Подставим в эту формулу функцию прогибов w_n (a) и учтем, что $q = \text{const}$:

$$A_n = q \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{l\pi y}{b} dy.$$

Интегрируя, получаем

$$A_n = \frac{4qab}{\pi^2} \sum_k \sum_l \frac{a_{kl}}{kl} \quad (Д)$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, n; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Подставим соотношения (г) и (д) в формулу (9.2), сохраняя в обоих рядах только члены, содержащие нечетные индексы k и l (при четных индексах коэффициенты $a_{kl} = 0$):

$$\mathcal{E}_n = \sum_k \sum_l \left[\frac{\pi^4 Dab}{8} a_{kl}^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4qab}{\pi^2} \frac{a_{kl}}{kl} \right]$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, n; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Коэффициенты a_{kl} нужно выбирать так, чтобы потенциальная энергия системы имела минимум, т. е. должны выполняться условия (9.5):

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial a_{kl}} = \frac{\pi^4 Dab}{8} 2a_{kl} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4qab}{\pi^2} \frac{1}{kl} = 0$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, n; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Отсюда находим значения постоянных коэффициентов:

$$a_{kl} = \frac{16q}{\pi^6 Dkl} \frac{1}{(k^2/a^2 + l^2/b^2)^2}$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, n; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Подставим эти коэффициенты в уравнение прогибов (а) и вынесем за знак суммы постоянный множитель a^4 :

$$\omega_n = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \sum_k \sum_l \frac{\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}}{kl(k^2/a^2 + l^2/b^2)^2} \quad (e)$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, n; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Если в формуле (е) взять бесконечно большое число членов, т. е. принять $n = \infty$, то получим решение задачи, совпадающее с точным [см. формулу (8.20)].

Рассмотрим приближенное решение, ограничиваясь одним членом ряда. Тогда из формулы (е) имеем

$$\omega_1 = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{(1 + a^2/b^2)^2} \quad (ж)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки (при $x = a/2$ и $y = b/2$):

$$\max \omega_1 = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \frac{1}{(1 + a^2/b^2)^2}$$

В квадратной пластинке, когда $a = b$, максимальный прогиб

$$\max \omega_1 = 4qa^4/(\pi^6 D).$$

Подставляя в эту формулу выражение цилиндрической жесткости (8.7) и принимая коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, находим

$$\max \omega_1 = [4qa^4/(\pi^6 Eh^3)] 12 (1 - \nu^2) = 0,0455qa^4/(Eh^3).$$

Это приближенное значение отличается от точного, равного $\max \omega = 0,0443qa^4/(Eh^3)$, всего на 2,7%.

Изгибающие моменты найдем по формулам (8.8), подставляя функцию прогибов в первом приближении (ж):

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \frac{1 + \nu a^2/b^2}{(1 + a^2/b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \frac{a^2/b^2 + \nu}{(1 + a^2/b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Максимальные изгибающие моменты также возникают в центре пластинки:

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \frac{1 + \nu a^2/b^2}{(1 + a^2/b^2)^2};$$

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \frac{a^2/b^2 + \nu}{(1 + a^2/b^2)^2}.$$

В квадратной пластинке

$$\max M_x = \max M_y = (4qa^2/\pi^4) (1 + \nu) = 0,0535qa^2.$$

Точное значение, приводимое в справочниках, составляет $\max M = 0,0479qa^2$. Следовательно, максимальный изгибающий момент для квадратной пластинки, подсчитанный в первом приближении, отличается от точного значения на 11,7%. Поэтому при вычислении изгибающих моментов в рассматриваемой пластинке следует брать еще несколько членов ряда (е). Еще менее точный результат получается при вычислении в первом приближении поперечных сил.

§ 7. Пример решения задачи методом Бубнова — Галеркина

Для иллюстрации метода Бубнова—Галеркина рассмотрим изгиб защемленной по контуру прямоугольной пластинки, к которой приложена равномерно распределенная нагрузка. Направление координатных осей показано на рис. 73.

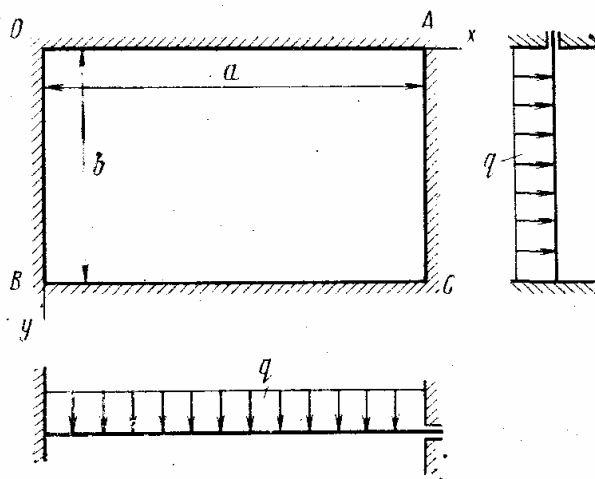


Рис. 73

Из характера закрепления пластинки вытекают следующие граничные условия. На гранях пластинки *OB* и *AC*

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a$$

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (a)$$

На гранях *OA* и *BC*

$$\text{при } y = 0 \text{ и } y = b$$

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (б)$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, приближенное выражение функции прогибов можно принять в виде ряда

$$\omega_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right), \quad (\text{в})$$

где функция

$$\Psi_{kl} = \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right)$$

каждого его члена удовлетворяет всем граничным условиям. Так, на грани OB

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

и, следовательно, $\omega_n = 0$. На грани AC

$$\cos \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=a} = \cos 2k\pi = 1$$

и тоже $\omega_n = 0$. Точно так же выполняются условия (б) для прогибов на гранях OA и BC .

Для проверки граничных условий в отношении углов поворота на контуре пластинки вычисляем производные от функции прогибов в) по x и y :

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial x} = \frac{2\pi}{a} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} k \sin \frac{2k\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{b}\right);$$

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial y} = \frac{2\pi}{b} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} l \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{a}\right) \sin \frac{2l\pi y}{b}.$$

На грани OB

$$\sin \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=0} = \sin 0 = 0$$

и, следовательно, производная $\frac{\partial \omega_n}{\partial x} = 0$. Точно так же на грани AC

$$\sin \frac{2k\pi x}{a} \Big|_{x=a} = \sin 2k\pi = 0$$

и производная $\frac{\partial \omega_n}{\partial x} = 0$. Аналогично, на гранях OA и BC обращается в нуль производная $\frac{\partial \omega_n}{\partial y}$. Таким образом, функция прогибов (в) удовлетворяет всем граничным условиям (а) и (б).

Для отыскания неопределенных параметров a_{kl} нужно составить систему уравнений Бубнова—Галеркина (9.7). В первом приближении ограничимся одним членом ряда (в):

$$\omega_1 = a_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \quad (\text{г})$$

Тогда функция φ_{kl} для этого члена ряда будет

$$\varphi_{11} = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right). \quad (д)$$

Подставляя соотношения (г) и (д) в уравнения (9.7), получаем

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ -16\pi^4 a_{11} D \left[\frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{2}{a^2 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{1}{b^4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - q \right\} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) dx dy = 0.$$

После преобразования приходим к сумме произведений интегралов:

$$\begin{aligned} & -16\pi^4 a_{11} D \left[\frac{1}{a^4} \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^a \left(1 - 2\cos \frac{2\pi y}{b} + \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy - \frac{2}{a^2 b^2} \int_0^a \left(\cos \frac{2\pi x}{a} - \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left(\cos \frac{2\pi y}{b} - \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy + \frac{1}{b^4} \int_0^a \left(1 - 2\cos \frac{2\pi x}{a} + \cos^2 \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left(\cos \frac{2\pi y}{b} - \cos^2 \frac{2\pi y}{b} \right) dy \right] - q \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) dy = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} & -16\pi^4 a_{11} D \left[\frac{1}{a^4} \left(-\frac{a}{2} \right) \left(b + \frac{b}{2} \right) - \frac{2}{a^2 b^2} \left(-\frac{a}{2} \right) \left(-\frac{b}{2} \right) + \frac{1}{b^4} \left(a + \frac{a}{2} \right) \left(-\frac{b}{2} \right) \right] - qab = 0 \end{aligned}$$

или после упрощения

$$16\pi^4 a_{11} D \left(\frac{3b}{4a^3} + \frac{1}{2ab} + \frac{3a}{4b^3} \right) - qab = 0.$$

Отсюда коэффициент

$$a_{11} = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \frac{1}{3 + 2a^2/b^2 + 3a^4/b^4}.$$

Внося полученное значение a_{11} в формулу (г), находим функцию прогибов в первом приближении:

$$w_1 = \frac{qa^4}{4\pi^4 D} \frac{\left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right)}{3 + 2a^2/b^2 + 3a^4/b^4}.$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки (при $x = a/2$ и $y = b/2$). Для квадратной пластинки при $a = b$ и коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$ получаем следующее значение максимального прогиба:

$$\begin{aligned} \max \omega_1 &= qa^4/(8\pi^4 D) = qa^4/(8\pi^4 E h^3) 12 (1 - \nu^2) = \\ &= 0,0140 qa^4/(E h^3). \end{aligned}$$

Точное значение максимального прогиба квадратной пластинки, защемленной по контуру и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки,

$$\max \omega = 0,0138 qa^4/(E h^3).$$

Таким образом, максимальный прогиб, полученный в первом приближении, отличается от точного значения менее чем на 1,5%.

При вычислении изгибающих моментов и поперечных сил ряды сходятся значительно хуже.

ГЛАВА X ОСНОВЫ РАСЧЕТА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Понятие о расчете оболочек по моментной и безмоментной теориям

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки h) мало по сравнению с другими размерами. Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется *срединой*. В дальнейшем ограничимся рассмотрением оболочек постоянной толщины. Их геометрия полностью определяется формой срединной поверхности и толщиной оболочки.

На рис. 74 показан элемент срединной поверхности оболочки. На элементе изображены линии пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей, нормальных к срединной поверхности, т. е. проходящих через нормаль ν . Эти линии (A_1MB_1 и A_2MB_2) представляют собой кривые, очерченные радиусами R_1 и R_2 . Величины, обратные радиусам,

$$k_1 = 1/R_1 \text{ и } k_2 = 1/R_2$$

называются *кривизнами* оболочки. На срединной поверхности оболочки всегда можно найти две взаимно перпен-

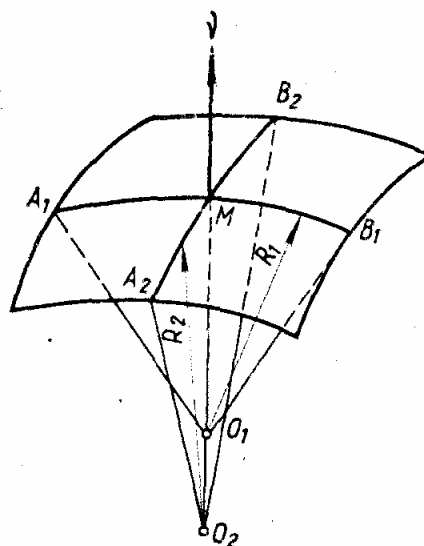


Рис. 74

дикулярные линии, кривизны которых обладают свойствами экстремальности: одна из них максимальна, а другая — минимальна. Кривизны, обладающие свойствами экстремальности, называются *главными*. Они обозначаются индексами 1 и 2. Геометрия поверхности оболочки характеризуется гауссовой кривизной, которая представляет собой произведение главных кривизн:

$$\Gamma = k_1 k_2.$$

Различают оболочки *положительной* гауссовой кривизны (сферические, эллиптические; рис. 75, а); *нулевой* гауссовой кривизны (цилиндрические, конические; рис. 75, б); *отрицательной* гауссовой кривизны

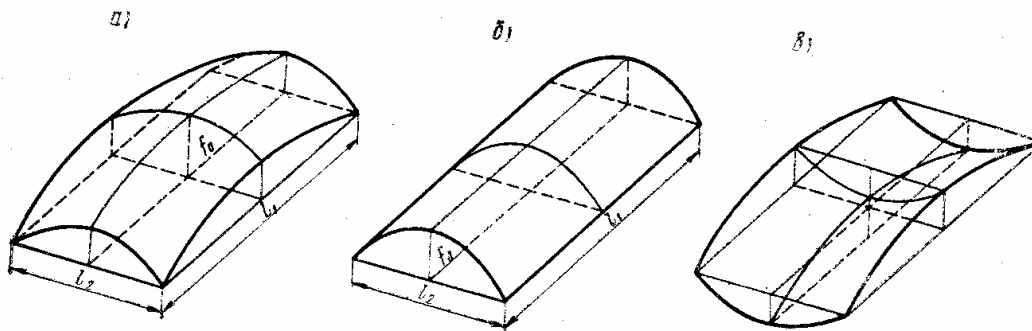


Рис. 75

(гиперболические; рис. 75, в); смешанной кривизны, т. е. состоящие из участков с различной гауссовой кривизной (торообразные).

Произвольная нагрузка вызывает в оболочках две группы усилий: 1) нормальные N_1, N_2 и сдвигающие S_1, S_2 силы, действующие в плоскостях, касательных к срединной поверхности (рис. 76, а); 2) изгибающие M_1, M_2 и крутящие M_{12}, M_{21} моменты, а также поперечные силы Q_1, Q_2 (рис. 76, б). В основном нагрузка уравнивается нормальными и сдвигающими усилиями, поэтому моменты и связанные с ними поперечные силы в оболочках резко снижаются по сравнению с пластинками. В отличие от пластинок оболочки работают главным образом на растяжение и сжатие, а не на изгиб и кручение, что позволяет более выгодно использовать материал.

В инженерной практике встречаются задачи, когда напряжения постоянны по толщине оболочки и приводятся только к усилиям первой группы. Такое напряженное состояние называется *безмоментным*. Если же напряжения приводятся к усилиям обеих групп, тогда напряженное состояние называется *моментным*.

В зависимости от вида напряженного состояния различают моментную и безмоментную теории оболочек. Расчет по безмоментной теории значительно проще расчета по полной, моментной теории. Не касаясь строгого доказательства, условия существования безмоментного напряженного состояния можно сформулировать следующим образом.

1. Оболочка должна иметь плавно изменяющуюся непрерывную поверхность.

2. Нагрузка на оболочку должна быть плавной и непрерывной.
 3. Края оболочки должны иметь возможность свободно перемещаться в направлении нормали к поверхности. Однако граничные условия должны обеспечивать неизменяемость формы оболочки.

3. Силы, приложенные к краям оболочки, должны лежать в плоскости, касательной к ее срединной поверхности.

В зависимости от отношения толщины к наименьшему радиусу кривизны срединной поверхности оболочки делятся на толстые и тонкие. Оболочки считаются толстыми, если отношение $h/R \geq 1/30$, и тонкими, если $1/30 \geq h/R \geq 1/1000$.

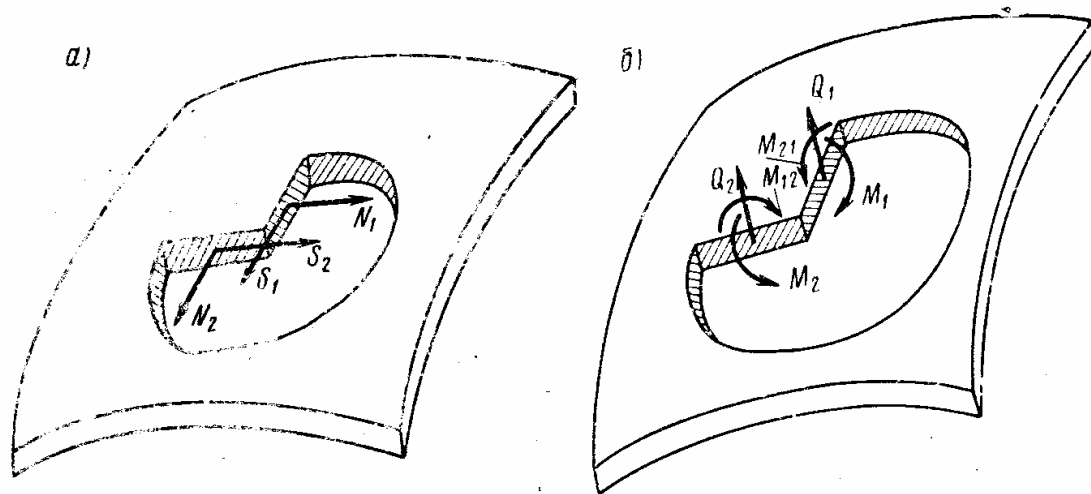


Рис. 76

Теория расчета тонких оболочек основывается на следующих гипотезах:

а) прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности, остается прямолинейным и нормальным к ней после деформирования оболочки и не меняет свою длину (гипотеза прямых нормалей);

б) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, пренебрежимо малы по сравнению с остальными напряжениями и при расчете не учитываются.

Аналогично формулировались упрощающие гипотезы и в теории изгиба пластинок (см. § 1, гл. VIII). Эти гипотезы сводят задачу к исследованию деформаций срединной поверхности оболочки. Кроме того, рассматриваются только оболочки, прогибы которых малы по сравнению с толщиной.

В настоящее время можно считать твердо установленным, что принятые гипотезы приводят к результатам, порядок погрешности которых не превышает отношения h/R .

Толстые оболочки рассчитываются как трехмерное упругое тело. Возникающие при этом трудности заставляют применять теорию расчета тонких оболочек при значительно большей относительной толщине $h/R = 1/5$ и даже $1/3$.

В дальнейшем рассматриваются только тонкие упругие оболочки.

§ 2. Расчет оболочки произвольной формы по безмоментной теории

Для оболочки произвольной формы применяют криволинейные ортогональные координаты α и β (рис. 77). Бесконечно малые дуги ds_1 и ds_2 на криволинейной поверхности можно рассматривать как прямые. В теории поверхностей их называют *линейными элементами*. Длины линейных элементов пропорциональны дифференциалам независимых переменных:

$$ds_1 = A d\alpha; \quad ds_2 = B d\beta. \quad (a)$$

Коэффициенты пропорциональности A и B представляют собой коэффициенты искажения, преобразующие приращения криволинейных координат в линейные отрезки. В общем случае эти коэффициенты являются функциями координат α и β .

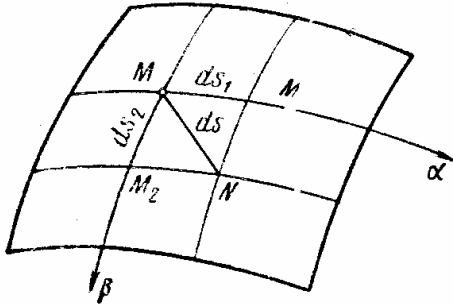


Рис. 77

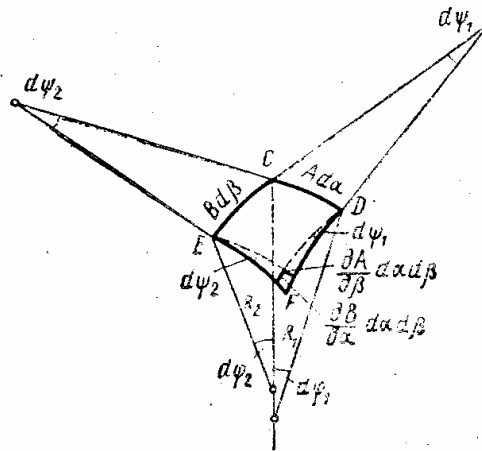


Рис. 78

Квадрат линейного элемента в ортогональных координатах составляет

$$(ds)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2,$$

или с учетом зависимостей (a)

$$(ds)^2 = A^2 (d\alpha)^2 + B^2 (d\beta)^2. \quad (б)$$

Выражение (б) называется *первой квадратичной формой* поверхности, а величины A и B — коэффициентами первой квадратичной формы.

Для исследования внутренних усилий выделим из срединной поверхности оболочки линиями $\alpha = \text{const}$, $\alpha + d\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ и $\beta + d\beta = \text{const}$ бесконечно малый элемент $CDFE$ (рис. 78). В координатах α и β он имеет форму ортогонального криволинейного четырехугольника со сторонами

$$\left. \begin{aligned} CD &= A d\alpha, & EF &= \left(A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha; \\ CE &= B d\beta, & DF &= \left(B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Углы $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$ соответствуют криволинейным сторонам четырехугольника $A d\alpha$ и $B d\beta$ и расположены в двух взаимно перпендикулярных главных нормальных плоскостях, проходящих через точку C . Согласно рисунку, эти углы подчиняются формулам

$$d\varphi_1 = A d\alpha / R_1; \quad d\varphi_2 = B d\beta / R_2. \quad (r)$$

Углы $d\psi_1$ и $d\psi_2$ лежат в касательной плоскости и образованы направлениями смежных касательных к линиям кривизн, проходящих через точки C , D и E . Для этих углов получаем

$$\left. \begin{aligned} d\psi_1 \approx \operatorname{tg}(d\psi_1) &= \frac{\frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha d\beta}{B d\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha; \\ d\psi_2 \approx \operatorname{tg}(d\psi_2) &= \frac{\frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta}{A d\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

В случае безмоментного напряженного состояния на гранях рассматриваемого элемента действуют отнесенные к единице длины сечения оболочки нормальные N_1 , N_2 и сдвигающие S_1 , S_2 усилия, являющиеся функциями координат α и β . Эти усилия изображены на рис. 79. Поверхностная нагрузка показана в виде составляющих интенсивности нагрузки X_v , Y_v , Z_v по осям подвижной ортогональной системы координат xuv с началом в точке C .

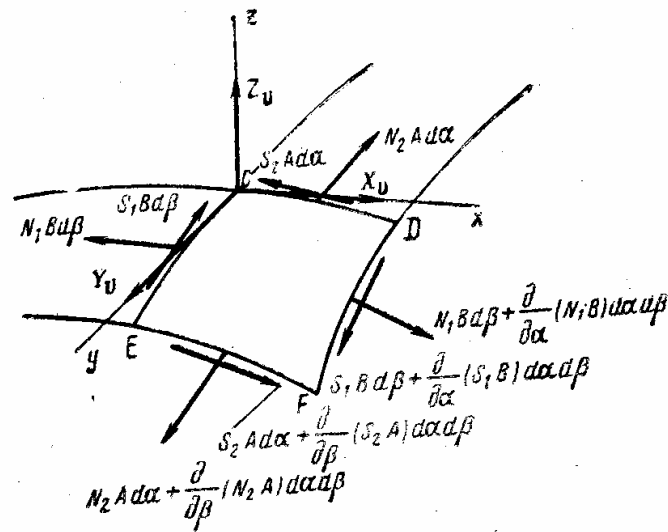


Рис. 79

Рассмотрим условия равновесия элемента $CDFE$. Сумма проекций всех сил на ось Cx

$$\begin{aligned} & N_1 B d\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) d\alpha d\beta - N_1 B d\beta + S_2 A d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_2 A) d\alpha d\beta - \\ & - S_2 A d\alpha - \left[N_2 A d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A) d\alpha d\beta \right] d\psi_2 + \left[S_1 B d\beta + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha} (S_1 B) d\alpha d\beta \right] d\psi_1 + X_v A d\alpha B d\beta = 0. \end{aligned}$$

Приведем подобные члены и отбросим стоящие в квадратных скобках величины высшего порядка малости:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (N_1 B)}{\partial \alpha} d\alpha d\beta + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_2 A) d\alpha d\beta - N_2 A d\alpha d\psi_2 + S_1 B d\beta d\psi_1 + \\ & + X_v A B d\alpha d\beta = 0. \end{aligned}$$

Отсюда после подстановки значений углов (д) и упрощения находим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (S_2 A) + S_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + X_v AB = 0. \quad (e)$$

Аналогично получаем еще два уравнения равновесия, проецируя все силы на оси Cy и Cz :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (S_1 B) + S_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + Y_v AB = 0; \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - Z_v = 0. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Из уравнения моментов относительно оси Cz получаем соотношение

$$S_1 = S_2 = S,$$

называемое законом парности сдвигающих усилий. С его учетом дифференциальные уравнения равновесия безмоментной теории оболочек можно представить в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (SA) + S \frac{\partial A}{\partial \beta} + X_v AB = 0; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (SB) + S \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (N_2 A) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + Y_v AB = 0; \\ \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - Z_v = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Уравнения (10.1) представляют собой полную систему основных уравнений безмоментной теории оболочек, выведенную в линиях главных кривизн срединной поверхности оболочки. Число неизвестных функций N_1 , N_2 и S соответствует числу уравнений, т. е. при расчете по безмоментной теории оболочка в бесконечно малом представляет собой статически определимую систему.

Решение системы уравнений (10.1) относится к статической задаче безмоментной теории оболочек. Чтобы найти деформации и перемещения в оболочке, к этим уравнениям следует добавить геометрические и физические уравнения. Здесь ограничиваемся исследованием только статической стороны задачи и рассмотрим основные уравнения для двух частных случаев.

Сферическая оболочка. В этом случае главные радиусы кривизны одинаковы:

$$R_1 = R_2 = R.$$

Заменяя координату α на φ , а β на θ , согласно рис. 80 получаем следующие значения длин линейных элементов:

$$ds_1 = R d\varphi; \quad ds_2 = r d\theta = R \sin \varphi d\theta. \quad (з)$$

Сравнивая соотношения (з) и (а), заключаем, что коэффициенты первой квадратичной формы принимают вид

$$A = R, \quad B = R \sin \varphi$$

и уравнения (10.1) преобразуются в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_1 \sin \varphi) - N_2 \cos \varphi + \frac{\partial S}{\partial \theta} + X_v R \sin \varphi &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (S \sin \varphi) + S \cos \varphi + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Y_v R \sin \varphi &= 0; \\ N_1 + N_2 - Z_v R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Осесимметричное нагружение сферической оболочки. В этом случае усилия не зависят от угла θ и все производные по θ обращаются в нуль. Кроме того, сдвигающие усилия

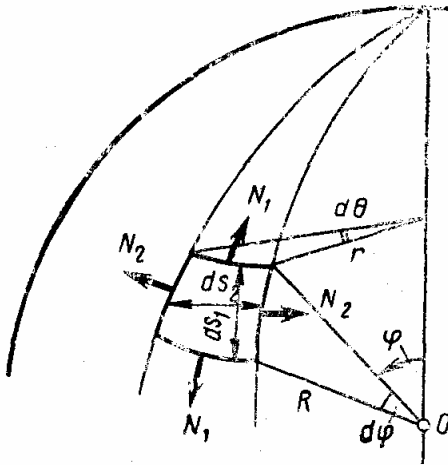


Рис. 80

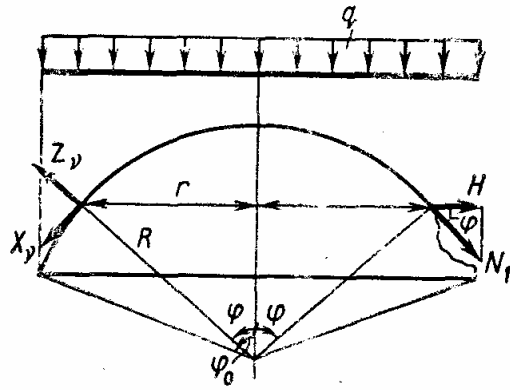


Рис. 81

$S = 0$. Действительно, в силу симметрии в любом меридиональном сечении слева и справа должны существовать одинаковые сдвигающие усилия, направленные в одну сторону. Это противоречит условиям равновесия и возможно лишь при $S = 0$. Из уравнений (10.2) остаются только два:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_1 \sin \varphi) - N_2 \cos \varphi + X_v R \sin \varphi &= 0; \\ N_1 + N_2 - Z_v R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

В связи с определенностью направления главных кривизн усилия в сферической оболочке имеют следующие названия: N_1 — меридиональное усилие (его направление совпадает с направлением меридианов на сфере), N_2 — кольцевое усилие.

Рассмотрим решение системы уравнений (10.3) на примере сферического купола, к которому приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q на единицу площади горизонтальной проекции оболочки (рис. 81). Согласно этому рисунку, составляющие поверхностной нагрузки таковы:

$$\begin{aligned} X_v &= q \sin \varphi \cos \varphi; \\ Z_v &= -q \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Подставляя их значения в уравнения (10.3), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_1 \sin \varphi) - N_2 \cos \varphi + qR \sin^2 \varphi \cos \varphi = 0;$$

$$N_1 + N_2 + qR \cos^2 \varphi = 0.$$

Решение этой системы уравнений дает

$$N_1 = -qR/2; N_2 = (-qR/2) \cos 2\varphi.$$

Эпюры меридиональных и кольцевых усилий по высоте купола изображены на рис. 82. Сжимающее кольцевое усилие имеет максимальное абсолютное значение в вершине купола при $\varphi = 0$. По мере

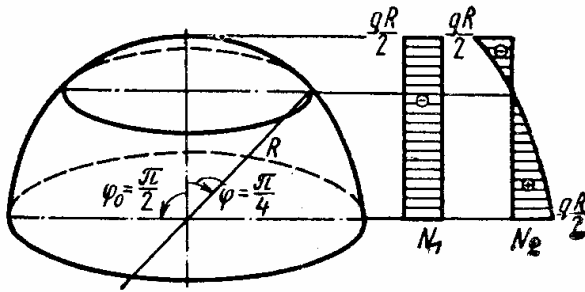


Рис. 82

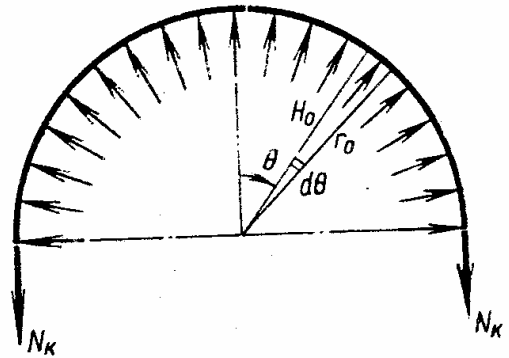


Рис. 83

продвижения вниз кольцевое усилие уменьшается и при $\varphi = 45^\circ$ равно нулю. Далее оно становится растягивающим и возрастает. Меридиональное усилие остается постоянно сжимающим.

Для определения горизонтальной составляющей меридионального усилия рассмотрим рис. 81, откуда

$$H = N_1 \cos \varphi = (-qR/2) \cos \varphi.$$

На нижнем краю купола при $\varphi = \varphi_0$ возникает горизонтальная составляющая реакции

$$H_0 = (-qR/2) \cos \varphi_0, \quad (\text{и})$$

для восприятия которой купол ставят на опорное кольцо. Реакция создает в кольце растягивающие усилия. Значение этих усилий определим из рассмотрения равновесия половины опорного кольца (рис. 83). Проецируя все силы на вертикальную ось, получаем

$$-2N_k + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} H_0 r_0 d\theta \cos \theta = 0,$$

откуда после интегрирования искомое усилие

$$N_k = H_0 r_0,$$

или с учетом формул (з) и (и)

$$N_k = (-qR^2/4) \sin 2\varphi_0.$$

Наибольшего значения растягивающее усилие в опорном кольце достигает при угле $\varphi_0 = 45^\circ$. Если $\varphi_0 = 90^\circ$, то усилие становится равным нулю и необходимость в опорном кольце отпадает.

§ 3. Дифференциальные уравнения равновесия круговой цилиндрической оболочки

Для иллюстрации моментной теории расчета оболочек рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку (рис. 84), контур которой образован нормальными плоскостями, совпадающими с плоскостями главных кривизн. В круговой цилиндрической оболочке главные радиусы кривизны имеют следующие значения:

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = R = \text{const.}$$

Положение произвольной точки на поверхности такой оболочки определяется двумя координатами: x и θ . Координаты x отсчитываются вдоль образующей оболочки, углы θ — вдоль дуги s с постоянным средним радиусом R .

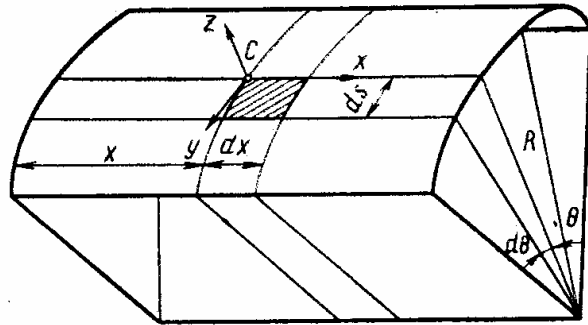


Рис. 84

Выведем дифференциальные уравнения равновесия круговой цилиндрической оболочки. Двумя парами плоскостей — $x = \text{const}$, $x + dx = \text{const}$; $\theta = \text{const}$, $\theta + d\theta = \text{const}$ — выделим около точки C срединной поверхности бесконечно малый элемент, стороны которого равны dx и $ds = R d\theta$. Для изучения равновесия этого элемента применим подвижную систему координат x, y, z . Начало координат расположим в точке C . Ось x направим вдоль образующей, ось z — по внешней нормали к срединной поверхности, а ось y — по касательной к срединной поверхности перпендикулярно плоскости $x Cz$.

На рис. 85 показаны напряжения, действующие на гранях рассматриваемого элемента. На грани, перпендикулярной образующей оболочки (нормаль параллельна оси x), действуют нормальное напряжение σ_x и две составляющие касательного напряжения $\tau_{\theta x}$ и τ_{zx} . На площадке, параллельной образующей, действуют нормальное напряжение σ_θ и две составляющие касательного напряжения $\tau_{z\theta}$ и $\tau_{x\theta}$. Напряжения на каждой грани могут быть сведены к статически эквивалентным равнодействующим усилиям. Рассмотрим вначале сечение с нормалью, параллельной оси x . Бесконечно малый элемент, заштрихованный на рисунке, очерчен по дуге радиусом $R + z$ и имеет толщину dz . Следовательно, его площадь равна $(R + z) d\theta dz$. При проецировании на координатные оси соответствующие напряжения необходимо умножать на эту площадь.

Сумма проекций на ось x сил, приложенных к рассматриваемому элементу, равна $\sigma_x (R + z) d\theta dz$.

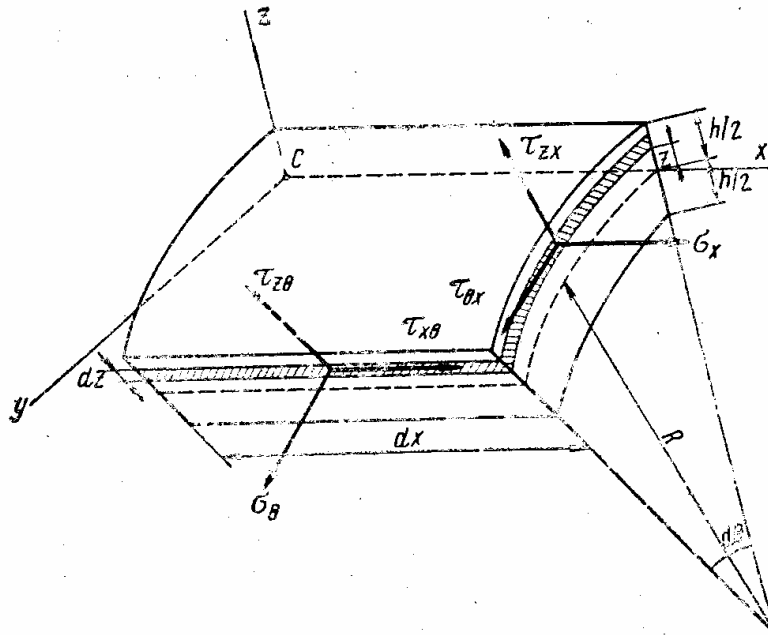


Рис. 85

Интегрируя это выражение по толщине пластинки, находим нормальную силу в указанном сечении:

$$N_x R d\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x (R + z) dz, \quad (a)$$

где N_x — нормальная сила, приходящаяся на единицу длины сечения с нормалью, параллельной оси x . Деля обе части равенства (а) на $R d\theta$, получаем

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz. \quad (б)$$

При расчете тонких оболочек можно пренебречь отношением z/R ввиду малости по сравнению с единицей. Тогда формула (б) принимает вид

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz.$$

Аналогично можно определить сдвигающую силу S_x , поперечную силу Q_x , изгибающий момент M_x и крутящий момент $M_{\theta x}$. Таким образом, в сечении оболочки с нормалью, параллельной оси x , возник-

кают следующие усилия, приходящиеся на единицу его длины:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz; \\ S_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta x} dz; \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{zx} dz. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz; \\ M_{\theta x} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta x} z dz. \end{aligned} \quad (в)$$

Переходим к рассмотрению радиального сечения. В этом сечении бесконечно малый элемент, заштрихованный на рис. 85, имеет площадь $dzdx$. Сумма проекций всех сил на нормаль к сечению

$$N_\theta dx = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta dz dx, \quad (г)$$

где N_θ — нормальная сила, приходящаяся на единицу длины радиального сечения:

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta dz.$$

Аналогично можно найти сдвигающую силу S_θ , поперечную силу Q_θ , изгибающий момент M_θ и крутящий момент $M_{x\theta}$.

Таким образом, в радиальном сечении возникают следующие усилия, приходящиеся на единицу его длины:

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta dz; \\ S_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{x\theta} dz; \\ Q_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{z\theta} dz; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} M_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta z dz; \\ M_{x\theta} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{x\theta} z dz. \end{aligned} \quad (д)$$

На основании закона парности касательных напряжений $\tau_{x\theta} = \tau_{\theta x}$ из формул (в) и (д) вытекает равенство сдвигающих усилий и крутящих моментов:

$$S_x = S_\theta = S; \quad M_{x\theta} = M_{\theta x} = H.$$

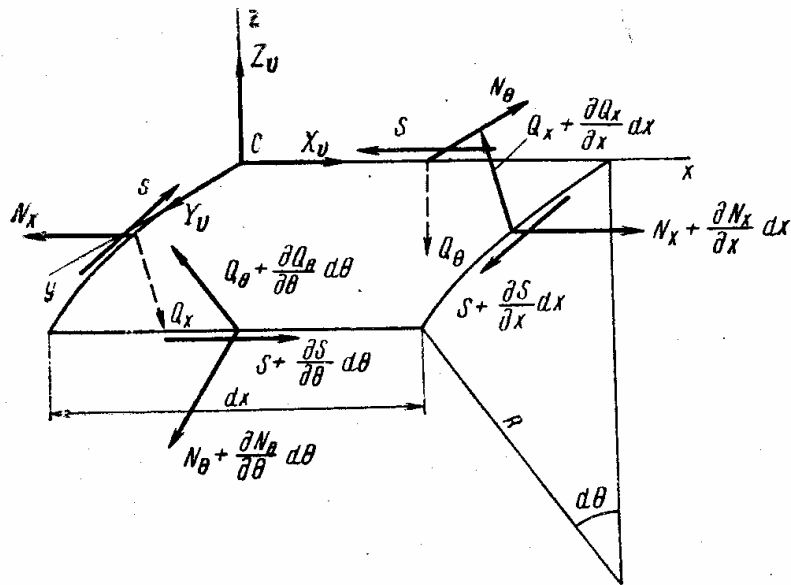


Рис. 86

Таким образом, в тонкой круговой цилиндрической оболочке существуют следующие зависимости между усилиями и напряжениями:

$$\left. \begin{aligned}
 N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz; & N_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta dz; & S &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{x\theta} dz; \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{zx} dz; & Q_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{z\theta} dz; \\
 M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz; & M_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta z dz; & H &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{x\theta} z dz.
 \end{aligned} \right\} (10.4)$$

Усилия, действующие на бесконечно малый элемент срединной поверхности оболочки, показаны на рис. 86 и 87. К нему приложены также поверхностные нагрузки, которые в направлениях подвижных координатных осей имеют составляющие X_v, Y_v, Z_v . Объемными силами пренебрегаем.

Составим уравнения равновесия рассматриваемого элемента. Проецируя все силы на ось x , находим

$$\begin{aligned}
 & \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) R d\theta - N_x R d\theta + \\
 & + \left(S + \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta \right) dx - S dx + \\
 & + X_v dx R d\theta = 0,
 \end{aligned}$$

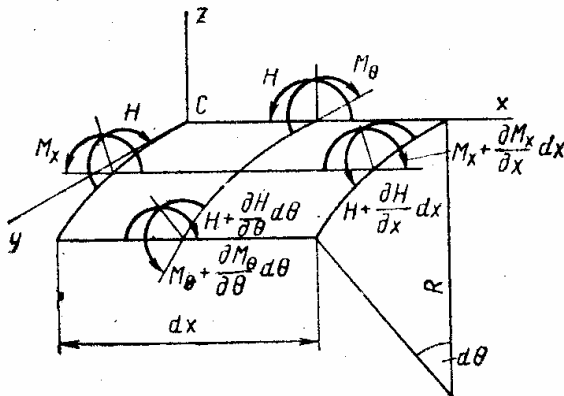


Рис. 87

откуда после упрощения получаем первое уравнение равновесия:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} + X_v = 0. \quad (е)$$

Аналогично получаем уравнения проекций на оси y и z :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} + Y_v &= 0; \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} + Z_v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

При вычислении моментов всех сил относительно координатных осей необходимо рассматривать совместно рис. 86 и 87. Сумма моментов относительно оси Cx равна

$$\begin{aligned} &\left(M_\theta + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dx - M_\theta dx + \left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) R d\theta - HR d\theta - \\ &- \left(Q_\theta + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dx R d\theta = 0, \end{aligned}$$

откуда после упрощения

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} = Q_\theta. \quad (з)$$

Аналогично получаем уравнение моментов относительно оси Cy :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta} = Q_x. \quad (и)$$

Сумма моментов всех сил относительно оси Cz с точностью до принятых предположений о малости толщины оболочки обращается в тождество.

Итак, имеем пять уравнений равновесия (е)—(и), которые включают в себя восемь неизвестных функций. Исключая из этих уравнений поперечные силы Q_x и Q_y , приходим к следующей системе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} + X_v &= 0; \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial x} + Y_v &= 0; \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \theta} + Z_v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Три дифференциальных уравнения равновесия содержат шесть неизвестных усилий: N_x , N_θ , S , M_x , M_θ и H . Таким образом, задача оказывается статически неопределимой и для нахождения усилий к уравнениям (10.5) необходимо добавить уравнения деформаций.

§ 4. Перемещения и деформации в круговой цилиндрической оболочке

Связь между перемещениями и деформациями в круговой цилиндрической оболочке можно получить из геометрических соотношений Коши в цилиндрической системе координат x, θ, r (рис. 88). Составляющие перемещения в этой системе имеют следующий смысл: u —

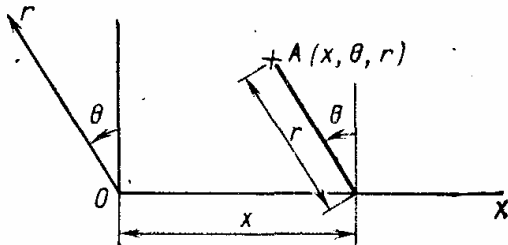


Рис. 88

составляющая вдоль оси x ; v — составляющая в направлении оси θ , т. е. перпендикулярная в каждой точке плоскости xOr ; w — составляющая в направлении оси r .

Составляющие линейной деформации в цилиндрической системе координат x, θ, r будем обозначать $\epsilon_x, \epsilon_\theta$ и ϵ_r , а составляющие угловой деформации — $\gamma_{x\theta}, \gamma_{\theta r}$ и γ_{rx} .

Геометрические соотношения Коши в цилиндрической системе координат (без вывода):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}; & \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\ \epsilon_r &= \frac{\partial w}{\partial r}; & \gamma_{rx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned} \right\} (10.6)$$

Для перехода от пространственного тела к оболочке вместо цилиндрической системы координат x, θ, r введем систему координат x, θ, z , связанную со срединной поверхностью оболочки. При этом координаты x и θ сохранят свое значение, а координата r преобразуется к координате z по следующей формуле:

$$r = R + z, \quad (a)$$

где R — радиус срединной поверхности оболочки; в рассматриваемой задаче величина постоянная.

Переход от одной системы координат к другой в выражениях производных сводится лишь к простой замене переменной r на z . Таким образом, геометрические соотношения Коши (10.6) в системе координат x, θ, z примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{R+r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R+z}; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \end{aligned} \right\} (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Из гипотезы прямых нормалей следует, что

$$\gamma_{\theta z} = \gamma_{zx} = 0; \quad \varepsilon_z = 0. \quad (10.7)$$

Подставляя в эти условия выражения составляющих деформации из соотношений (б), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= 0; \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Третья строка формул (в) указывает на то, что перемещение по нормали к срединной поверхности оболочки не зависит от координаты z , т. е. $w = w(x, y)$, и все точки, лежащие на нормали, получают одинаковые перемещения в направлении этой нормали, равные перемещению точки срединной поверхности.

Из двух первых формул (в) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{v}{R+z} - \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Производные $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$ в точках срединной поверхности оболочки, т. е. при $z = 0$, принимают следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 &= -\frac{\partial w}{\partial x}; \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 &= \frac{v_0}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

Здесь, как и в дальнейшем, индекс 0 относится к значениям функций в точках срединной поверхности оболочки.

На основании гипотезы прямых нормалей составляющие перемещения u и v должны быть линейными функциями относительно координаты z , т. е. их можно представить в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + k_1 z; \\ v &= v_0 + k_2 z, \end{aligned} \right\} \quad (е)$$

где k_1 и k_2 — угловые коэффициенты нормали к срединной поверхности соответственно в координатных плоскостях zCx и $zC\theta$. Они являются функциями координат x и θ . Для определения угловых коэффициентов продифференцируем формулы (е) по z и, подставив $z = 0$, найдем значения этих производных на срединной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 &= k_1; \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 &= k_2. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Сравнивая формулы (д) и (ж), получаем следующие значения угловых коэффициентов:

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{\partial w}{\partial x}; \\ k_2 &= \frac{v_0}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в формулы (е), находим составляющие перемещения u и v , являющиеся интегралами уравнений в частных производных (г):

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}; \\ v &= v_0 + z \left(\frac{v_0}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (з)$$

Таким образом, составляющие перемещения произвольной точки оболочки выражены через составляющие перемещения точки ее срединной поверхности u_0 , v_0 и w . Подставляя соотношения (з) в формулы (б) и пренебрегая при этом величиной z ввиду малости по сравнению с R , находим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + z \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Получили геометрические уравнения теории круговой цилиндрической оболочки. Они устанавливают связь между деформациями в произвольной точке оболочки и перемещениями соответствующей точки срединной поверхности. Эти уравнения удобно представить в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x; \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + z\kappa_\theta; \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + 2z\kappa_{x\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

Первые слагаемые в этих формулах (ϵ_x^0 , ϵ_θ^0 , $\gamma_{x\theta}^0$) представляют собой деформации точек срединной поверхности, а вторые связаны с изгибом и кручением срединной поверхности, а именно: κ_x — кривизна оболочки в направлении оси x после деформирования; κ_θ — изменение кривизны оболочки в направлении дуги; $\kappa_{x\theta}$ — относительное кручение срединной поверхности оболочки.

Из сопоставления формул (10.8) и (10.9) получаем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}; \\ \epsilon_\theta^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w}{R}; \\ \gamma_{x\theta}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x}; \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}; \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{1}{2R} \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

§ 5. Физические уравнения круговой цилиндрической оболочки

Установим зависимости между усилиями и деформациями в круговой цилиндрической оболочке. Для этого воспользуемся формулами закона Гука (3.2). Чтобы перейти к системе координат x , θ , z , связанной со срединной поверхностью оболочки, в этих формулах достаточно заменить индекс y на θ . В результате с учетом зависимости (3.1) получаем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= [\sigma_x - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)]/E; & \gamma_{x\theta} &= 2(1 + \nu)\tau_{x\theta}/E; \\ \epsilon_\theta &= [\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]/E; & \gamma_{\theta z} &= 2(1 + \nu)\tau_{\theta z}/E; \\ \epsilon_z &= [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_\theta)]/E; & \gamma_{zx} &= 2(1 + \nu)\tau_{zx}/E. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

На основании второй из принятых гипотез (см. § 1 данной главы) нормальное напряжение $\sigma_z = 0$. В связи с этим два первых уравнения (a) упрощаются:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= (\sigma_x - \nu\sigma_\theta)/E; \\ \epsilon_\theta &= (\sigma_\theta - \nu\sigma_x)/E. \end{aligned}$$

Отсюда находим зависимости между нормальными напряжениями и линейными деформациями в цилиндрической оболочке:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E(\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta)/(1 - \nu^2); \\ \sigma_\theta &= E(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x)/(1 - \nu^2). \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Касательное напряжение $\tau_{x\theta}$, согласно четвертому уравнению (а), составляет

$$\tau_{x\theta} = E\gamma_{x\theta}/[2(1+\nu)], \quad (в)$$

а касательные напряжения $\tau_{\theta z}$ и τ_{zx} , согласно условиям (10.7), равны нулю.

Подставляя в формулы (б) и (в) выражения деформаций (10.9), получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= [E/(1-\nu^2)] [(\epsilon_x^0 + \nu\epsilon_\theta^0) + z(\kappa_x + \nu\kappa_\theta)]; \\ \sigma_\theta &= [E/(1-\nu^2)] [(\epsilon_\theta^0 + \nu\epsilon_x^0) + z(\kappa_\theta + \nu\kappa_x)]; \\ \tau_{x\theta} &= \{E/[2(1+\nu)]\} (\gamma_{x\theta}^0 + 2z\kappa_{x\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Внесем значения напряжений (г) в выражения усилий (10.4):

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{+h/2} [(\epsilon_x^0 + \nu\epsilon_\theta^0) + z(\kappa_x + \nu\kappa_\theta)] dz; \\ N_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{+h/2} [(\epsilon_\theta^0 + \nu\epsilon_x^0) + z(\kappa_\theta + \nu\kappa_x)] dz; \\ S &= \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{+h/2} (\gamma_{x\theta}^0 + 2z\kappa_{x\theta}) dz; \\ M_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{+h/2} [(\epsilon_x^0 + \nu\epsilon_\theta^0) + z(\kappa_x + \nu\kappa_\theta)] z dz; \\ M_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{+h/2} [(\epsilon_\theta^0 + \nu\epsilon_x^0) + z(\kappa_\theta + \nu\kappa_x)] z dz; \\ H &= \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{+h/2} (\gamma_{x\theta}^0 + 2z\kappa_{x\theta}) z dz. \end{aligned}$$

После интегрирования получаем

$$\left. \begin{aligned} N_x &= [Eh/(1-\nu^2)] (\epsilon_x^0 + \nu\epsilon_\theta^0); \\ N_\theta &= [Eh/(1-\nu^2)] (\epsilon_\theta^0 + \nu\epsilon_x^0); \\ S &= \{Eh/[2(1+\nu)]\} \gamma_{x\theta}^0; \\ M_x &= D(\kappa_x + \nu\kappa_\theta); \\ M_\theta &= D(\kappa_\theta + \nu\kappa_x); \\ H &= D(1-\nu)\kappa_{x\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

Здесь введено обозначение *цилиндрической жесткости оболочки*, аналогичное цилиндрической жесткости пластинки:

$$D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]. \quad (10.12)$$

Уравнения (10.11) представляют собой упрощенные физические уравнения теории тонких оболочек. Они выражают зависимость между усилиями и деформациями в тонкой круговой цилиндрической оболочке.

Таким образом, для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии тонкой круговой цилиндрической оболочки имеем 15 уравнений: три уравнения равновесия (10.5), шесть уравнений деформаций (10.10) и шесть физических уравнений (10.11). Эти уравнения включают в себя 15 неизвестных: шесть усилий — $N_x, N_\theta, S, M_x, M_\theta, H$; шесть составляющих деформаций — $\varepsilon_x^0, \varepsilon_\theta^0, \gamma_{x\theta}^0, \kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}$ и три составляющих перемещения — u_0, v_0, w .

§ 6. Осесимметричное нагружение замкнутой круговой цилиндрической оболочки

Решение системы 15 уравнений (10.5), (10.10) и (10.11) с 15 неизвестными в общем случае нагружения оболочки представляет большие математические трудности. Рассмотрим один из простых, но практически интересных случаев — замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, нагруженную симметрично относительно ее оси (рис. 89). Осевая симметрия позволяет значительно упростить основные уравнения. Усилия, деформации и перемещения благодаря симметрии не зависят от полярного угла θ , поэтому все производные по θ в указанных уравнениях обращаются в нуль. Сдвигающие усилия S и крутящий момент H также обращаются в нуль. Из составляющих поверхностных нагрузок отлична от нуля только одна — $Z_v = q$. С учетом отмеченных упрощений дифференциальные уравнения равновесия (10.5) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d N_x}{d x} &= 0; \\ 0 &\equiv 0; \\ \frac{d^2 M_x}{d x^2} - \frac{N_\theta}{R} + q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Первое из уравнений (a) указывает, что нормальная сила N_x не зависит от координаты x и, следовательно, постоянна. Она не входит в остальные уравнения, поэтому ее можно определять независимо от остальных усилий; будем считать $N_x = 0$.

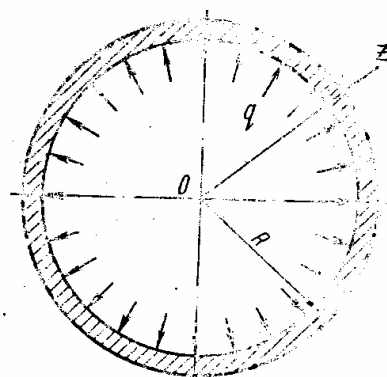
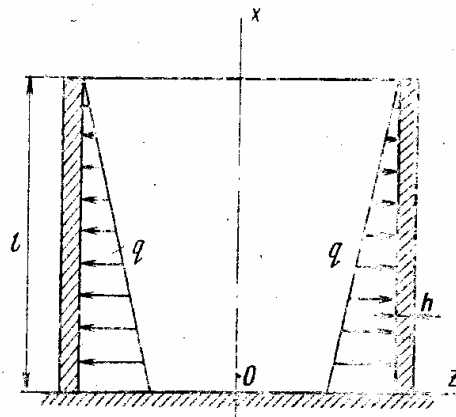


Рис. 89

Остается рассмотреть последнее уравнение (а). В него входят два неизвестных усилия: M_x и N_θ .

Внесем в выражения усилий (10.11) деформации из формул (10.10) и учтем осевую симметрию:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{w}{R} \right) = 0,$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right);$$

$$S = 0;$$

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$M_\theta = -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$H = 0.$$

Из первого уравнения следует, что

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\nu \frac{w}{R}.$$

Внося это соотношение во второе уравнение, получим интересующие нас усилия в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= Eh w / R; \\ M_x &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Формулы (10.13) могут быть получены из формул (10.11), если в них принять $\nu = 0$. Поэтому при рассмотрении приближенных решений в теории оболочек пользуются упрощенной системой физических уравнений (10.11), полагая в них $\nu = 0$.

Подставляя формулы (10.13) в последнее уравнение (а), находим

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = q. \quad (10.14)$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности замкнутой круговой цилиндрической оболочки, нагруженной симметрично относительно оси. Для интегрирования уравнения удобно ввести безразмерную координату $\xi = \alpha x$. Параметр

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}} \quad (10.15)$$

имеет размерность $1/L$, где L — размерность длины.

В безразмерных координатах уравнение (10.14) принимает вид

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = \frac{q}{\alpha^4 D}. \quad (10.16)$$

Это дифференциальное уравнение совпадает с дифференциальным уравнением изгиба балки, лежащей на упругом (винклеровом) основании. Его решение можно представить в форме

$$\omega = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + C_4 Y_4 + \bar{\omega}, \quad (10.17)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — произвольные постоянные; Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 — фундаментальные функции акад. А. Н. Крылова, имеющие следующий гиперголо-тригонометрический вид:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi; \\ Y_2 &= (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi)/2; \\ Y_3 &= \operatorname{sh} \xi \sin \xi/2; \\ Y_4 &= (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi)/4. \end{aligned} \right\} \quad \text{б)}$$

Эти функции табулированы (см.: Крылов А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. АН СССР, 1931; Филоненко-Бородич М. М. Курс сопротивления материалов, т. II, М., 1956).

Частное решение уравнения (10.16) может быть выражено с помощью фундаментальных функций А. Н. Крылова интегралом

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\alpha^4 D} \int_0^{\xi} Y_4(\xi - t) q(t) dt. \quad (10.18)$$

Найдя функцию прогибов (10.17), можно определить углы поворота φ , изгибающий момент M_x , поперечную силу Q_x и нормальную силу N_θ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{d\omega}{dx} = \alpha (-4C_1 Y_4 + C_2 Y_1 + C_3 Y_2 + C_4 Y_3 + \bar{\omega}'); \\ M_x &= -D \frac{d^2\omega}{dx^2} = -\alpha^2 D (-4C_1 Y_3 - 4C_2 Y_4 + C_3 Y_1 + C_4 Y_2 + \bar{\omega}'''); \\ Q_x &= -D \frac{d^3\omega}{dx^3} = -\alpha^3 D (-4C_1 Y_2 - 4C_2 Y_3 + 4C_3 Y_4 + C_4 Y_1 + \bar{\omega}'''); \\ N_\theta &= Eh\omega/R = Eh (C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + C_4 Y_4 + \bar{\omega})/R. \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

§ 7. Расчет стенки цилиндрического резервуара

В качестве конкретного примера расчета цилиндрической оболочки по моментной теории рассмотрим цилиндрический резервуар, наполненный до краев жидкостью (см. рис. 89). Направления осей показаны на рисунке. Резервуар имеет следующие размеры: радиус оболочки $R = 2$ м, длина оболочки вдоль образующей $l = 3$ м, толщина оболочки $h = 0,15$ м. Удельный вес воды, заполняющей резервуар, $\gamma = 10$ кН/м³, коэффициент Пуассона материала оболочки — железобетона $\nu = 1/6$. Верхний край оболочки свободен от закрепления, а нижний — защемлен.

Боковые стенки рассматриваемого резервуара представляют собой замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, нагруженную симметрично относительно оси x , и для ее расчета можно применить формулы предыдущего параграфа.

Поверхностная нагрузка, действующая на оболочку в направлении оси z ,

$$q = \gamma (l - x),$$

или в безразмерных координатах

$$q = \gamma (\lambda - \xi)/\alpha, \quad (a)$$

где $\lambda = \alpha l$ — безразмерная длина оболочки.

Найдем частное решение \bar{w} , соответствующее заданной нагрузке, для чего в выражении (a) заменим переменную ξ на t и внесем в интеграл (10.18):

$$\bar{w} = \frac{\gamma}{\alpha^5 D} \int_0^{\xi} Y_4 (\xi - t) (\lambda - t) dt.$$

После интегрирования получаем

$$\bar{w} = [\gamma/(4\alpha^5 D)] (\lambda - \xi - \lambda Y_1 + Y_2).$$

Вычислим производные этой функции и внесем их в уравнения (10.17) и (10.19):

$$\left. \begin{aligned} \omega &= C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + C_4 Y_4 + \frac{\gamma}{4\alpha^5 D} (\lambda - \xi - \lambda Y_1 + Y_2); \\ \varphi &= \alpha \left[-4C_1 Y_4 + C_2 Y_1 + C_3 Y_2 + C_4 Y_3 + \frac{\gamma}{4\alpha^5 D} (-1 + 4\lambda Y_4 + Y_1) \right]; \\ M_x &= -\alpha^2 D \left[-4C_1 Y_3 - 4C_2 Y_4 + C_3 Y_1 + C_4 Y_2 + \frac{\gamma}{\alpha^5 D} (\lambda Y_3 - Y_4) \right]; \\ Q_x &= -\alpha^3 D \left[-4C_1 Y_2 - 4C_2 Y_3 - 4C_3 Y_4 + C_4 Y_1 + \frac{\gamma}{\alpha^5 D} (\lambda Y_2 - Y_3) \right]; \\ N_\theta &= \frac{Eh}{R} \left[C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + C_4 Y_4 + \frac{\gamma}{4\alpha^5 D} (\lambda - \xi - \lambda Y_1 + Y_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Для определения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 рассмотрим граничные условия. Нижний край оболочки жестко зашпелен, следовательно, при $\xi = 0$ $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$. Отсюда $C_1 = C_2 = 0$.

Верхний край оболочки не закреплен, следовательно, при $\xi = \lambda$ $M_x = 0$, $Q_x = 0$. Подставляя в эти условия значения изгибающего момента M_x и поперечной силы Q_x из уравнений (б), находим

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{\gamma}{\alpha^5 D} \frac{Y_1(\lambda) Y_4(\lambda) - Y_2(\lambda) Y_3(\lambda) + \lambda [Y_2^2(\lambda) - Y_1(\lambda) Y_3(\lambda)]}{Y_1^2(\lambda) + 4Y_2(\lambda) Y_4(\lambda)}, \\ C_4 &= \frac{\gamma}{\alpha^5 D} \frac{Y_1(\lambda) Y_3(\lambda) + 4Y_4^2(\lambda) - \lambda [Y_1(\lambda) Y_2(\lambda) + 4Y_3(\lambda) Y_4(\lambda)]}{Y_1^2(\lambda) + 4Y_2(\lambda) Y_4(\lambda)}. \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

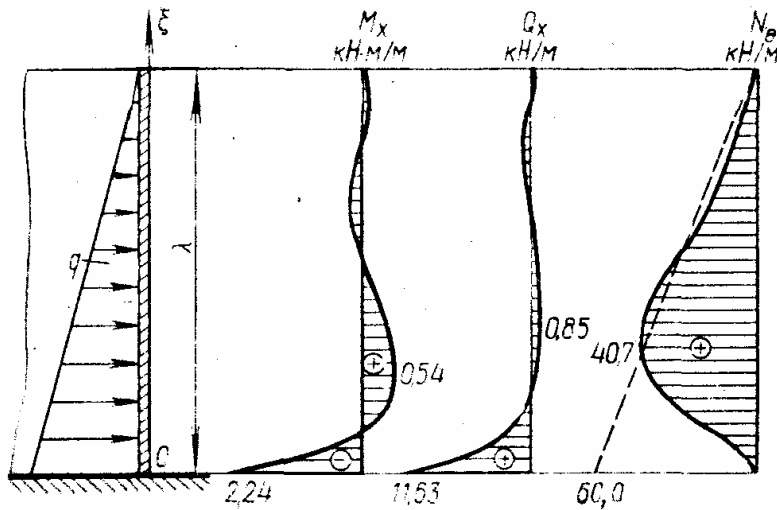


Рис. 90

Теперь усилия в оболочке определяются по формулам (6), которые с учетом того, что $C_1 = C_2 = 0$, принимают вид

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\alpha^2 D \left[C_3 Y_1 + C_4 Y_2 + \frac{\gamma}{\alpha^3 D} (\lambda Y_3 - Y_4) \right]; \\ Q_x &= -\alpha^3 D \left[-4C_3 Y_4 + C_4 Y_1 + \frac{\gamma}{\alpha^3 D} (\lambda Y_2 - Y_3) \right]; \\ N_0 &= \frac{Eh}{R} \left[C_3 Y_3 + C_4 Y_4 + \frac{\gamma}{4\alpha^3 D} (\lambda - \xi - \lambda Y_1 + Y_2) \right]. \end{aligned} \right\} (10.21)$$

Для построения эпюр усилий по длине оболочки выполним вычисления согласно вышеприведенным данным. Параметр α по формуле (10.15)

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-1/36)}{2^2 \cdot 0,15^2}} = 2,4 \text{ 1/м.}$$

Безразмерная длина оболочки

$$\lambda = \alpha l = 2,4 \cdot 3 = 7,2.$$

Принимаем по таблице (см., например, приложение к упомянутому выше учебнику М. М. Филоненко-Бородича) значения функций Y_i при $\xi = \lambda = 7,2$:

$$\begin{aligned} Y_1(7,2) &= 407,4216; \\ Y_2(7,2) &= 469,4772; \\ Y_3(7,2) &= 265,7664; \\ Y_4(7,2) &= 31,0281. \end{aligned}$$

По формулам (10.20) подсчитываем произвольные постоянные:

$$C_3 = 3,098\gamma/(\alpha^5 D);$$

$$C_4 = -6,697\gamma/(\alpha^5 D).$$

Подставляя значения постоянных в формулы (10.21), получаем следующие выражения усилий в оболочке:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= (-\gamma/\alpha^3)(3,098Y_1 - 6,697Y_2 + 7,2Y_3 - Y_4); \\ Q_x &= (-\gamma/\alpha^2)(-12,39Y_4 - 6,697Y_1 + 7,2Y_2 - Y_3); \\ N_\theta &= (\gamma R/\alpha)(12,39Y_3 - 26,79Y_4 - 7,2Y_1 + Y_2 + 7,2 - \xi). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

В выражении усилия N_θ величина α^4 заменена согласно обозначению (10.15).

Дальнейшие вычисления не представляют затруднений. Подставляя в уравнения (в) табличные значения фундаментальных функций Крылова для различных ξ , можно построить эпюры M_x , Q_x и N_θ . Эти эпюры изображены на рис. 90. Штриховой линией показана эпюра N_θ , соответствующая расчету по безмоментной теории.

§ 8. Качественная характеристика напряженного состояния открытых и замкнутых цилиндрических оболочек

Исследование свойств напряженного состояния цилиндрических оболочек позволяет сделать вывод, что оно зависит от формы оболочки, относительной длины, характера внешних активных и реактивных воздействий.

Длина цилиндрической оболочки характеризуется отношением l_1/l_2 , где l_1 — длина оболочки в продольном направлении, а l_2 — диаметр замкнутой или длина волны открытой оболочки.

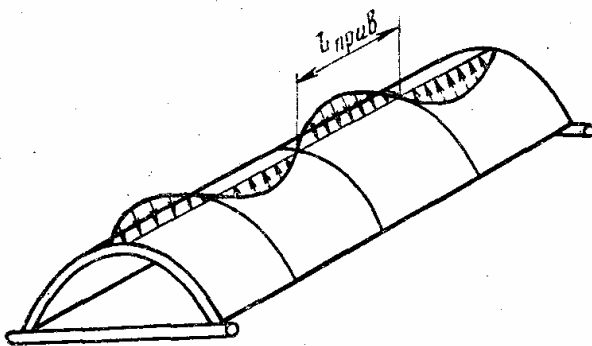


Рис. 91

Цилиндрические оболочки называются длинными, если отношение $l_1/l_2 > 4$; оболочки средней длины имеют $4 \geq l_1/l_2 \geq 1$, у коротких оболочек $l_1/l_2 < 1$.

Основной характеристикой внешних активных и реактивных воздействий является их изменяемость, т. е. изменяемость функций, которыми описываются эти воз-

действия. Функции должны изменяться слабо. Если же в продольном направлении они изменяются сильно и периодически, как, например, показано на рис. 91, то напряженное состояние также будет периодическим. В такой оболочке каждый участок длиной $l_{прив}$ нужно рассматривать как отдельную оболочку, работающую независимо от других частей и опертую на жесткие диафрагмы. В этом случае $l_1 = l_{прив}$.

Рассмотрим замкнутые оболочки в условиях произвольно распределенной нагрузки, плавно изменяющейся в продольном и кольцевом направлениях. Длинную оболочку, опертую по криволинейным краям, можно рассматривать как балку трубчатого сечения. Вследствие балочного характера распределения напряжений пространственный эффект работы длинной замкнутой оболочки значительно снижается. Расчет такой оболочки по безмоментной теории дает неверные результаты.

В длинных оболочках не все усилия имеют одинаковый порядок, так в поперечных сечениях изгибающий M_x и крутящий H моменты, а также поперечная сила Q_x в большинстве случаев малы по сравнению с прочими усилиями и их можно считать равными нулю. На этом упрощении основана «полубезмоментная» теория расчета оболочек.

В оболочке средней длины напряженное состояние можно рассматривать состоящим из двух независимых состояний: основного, т. е. безмоментного, охватывающего всю оболочку, и моментного напряженного состояния вблизи опор. Последнее при удалении от опор быстро затухает и поэтому носит название *краевого эффекта*.

В коротких оболочках крайевой эффект охватывает всю оболочку, и их расчет следует производить по моментной теории.

При нагрузках, сильно изменяющихся в кольцевом направлении оболочки, возникают значительные изгибные напряжения в этом направлении, которые могут играть решающее значение.

Перейдем к рассмотрению напряженного состояния открытых цилиндрических оболочек. Длинную открытую оболочку со свободно висящими продольными краями при нагрузке, плавно изменяющейся в продольном направлении, можно рассчитывать как балку. При нагрузке, плавно изменяющейся в продольном и поперечном направлениях, следует учитывать взаимное влияние изменения нагрузки в этих направлениях.

Для длинной открытой оболочки еще в большей степени, чем для замкнутой, обоснованно упрощение, связанное с пренебрежением усилиями M_x , H и Q_x . Безмоментная теория, так же как и в случае длинной замкнутой оболочки, не дает здесь правильного результата. Открытую оболочку не удастся удовлетворительно рассчитать по безмоментной теории, так как в рамках этой теории невозможно удовлетворить граничным условиям на прямолинейных краях. Неприменима безмоментная теория и к расчету средних и коротких открытых оболочек.

В отличие от замкнутых оболочек средней длины напряженное состояние открытых оболочек не может быть представлено в виде суммы безмоментного напряженного состояния и напряжений от краевого эффекта. Тем более это относится к коротким оболочкам.

Из приведенных рассуждений видно, что в ряде случаев некоторые из усилий в оболочках не играют существенной роли в распределении напряжений. На пренебрежении второстепенными усилиями основаны различные приближенные теории расчета оболочек.

§ 9. «Полубезмоментная» теория цилиндрических оболочек Власова

При рассмотрении длинных цилиндрических оболочек появляется, как указывалось в предыдущем параграфе, возможность пренебречь в поперечных сечениях изгибающим M_x и крутящим H моментами и поперечной силой Q_x . Приняв указанные усилия равными нулю, получим модель оболочки, предложенную В. З. Власовым. Эта модель представляет собой тонкостенную пространственную систему, состоящую из бесконечного множества поперечных элементарных изгибае-

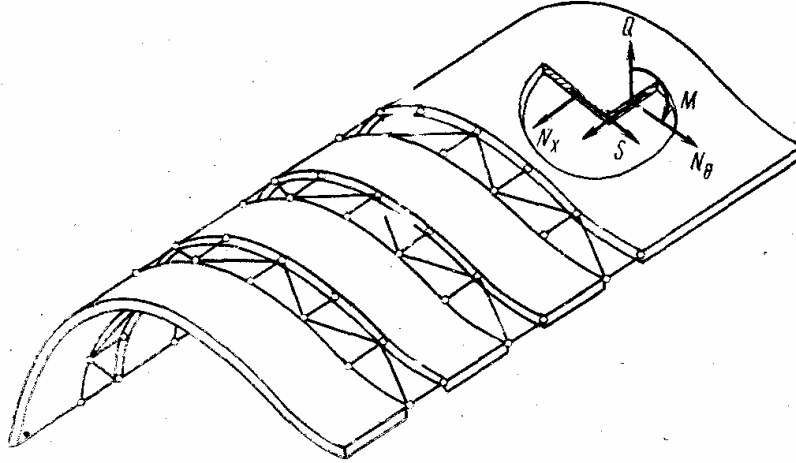


Рис. 92

мых полосок. Каждая полоска уподобляется плоскому кривому стержню, работающему не только на растяжение или сжатие, но также на поперечный изгиб и сдвиг. Взаимодействие двух смежных полосок осуществляется путем передачи с одной из них на другую только нормальных и сдвигающих усилий. На рис. 92 эти усилия заменены связями, расположенными на уровне срединной поверхности оболочки.

На рис. 93 изображены бесконечно малый элемент срединной поверхности и действующие по его сторонам усилия. Дифференциальные уравнения равновесия элемента цилиндрической оболочки (см. § 3 данной главы) в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + X_v &= 0; \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial s} + \frac{Q}{R} + Y_v &= 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial s} - \frac{N_\theta}{R} + Z_v &= 0; \\ \frac{\partial M}{\partial s} - Q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

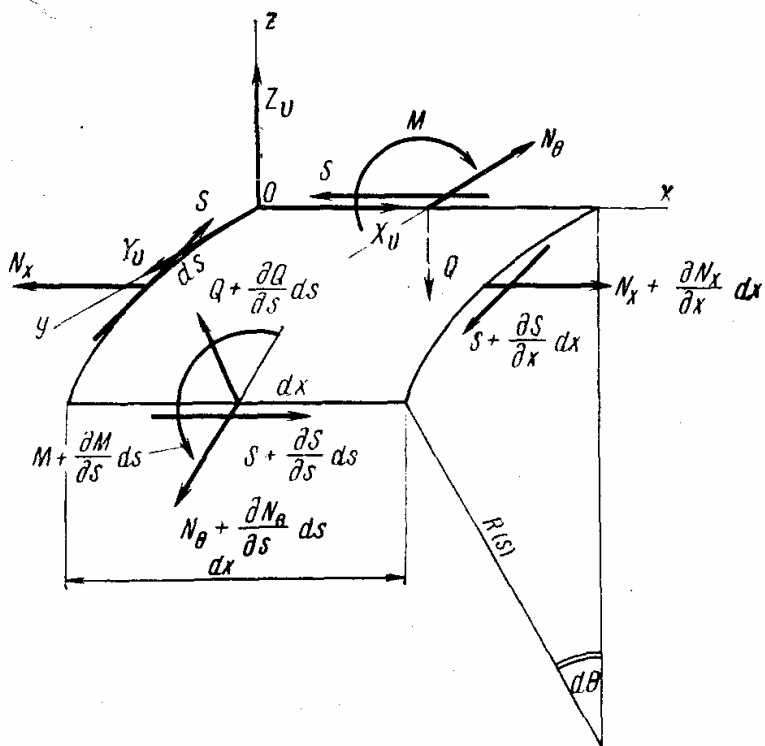


Рис. 93

Система уравнений (10.22) путем исключения усилий S , Q и M_θ приводится к одному уравнению с двумя неизвестными:

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \Omega M = P, \quad (a)$$

где Ω — дифференциальный оператор Власова четвертого порядка по переменной s , связанный с законом секториальных площадей и имеющий вид

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} \right); \quad (10.23)$$

P — функция, зависящая от составляющих поверхностей нагрузки и определяемая по формуле

$$P = - \frac{\partial X_v}{\partial x} + \frac{\partial Y_v}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} (RZ_v). \quad (10.24)$$

Кроме статических вводятся также и геометрические гипотезы: поперечные удлинения и деформации сдвига в срединной поверхности принимаются равными нулю как величины, мало влияющие на основные усилия оболочки:

$$\gamma_{x\theta} = 0; \quad \varepsilon_\theta = 0. \quad (б)$$

Составляющие перемещения произвольной точки срединной поверхности по направлениям образующей, касательной к дуге конформной линии и внешней нормали, обозначим соответственно $u(x, s)$,

$v(x, s)$ и $w(x, s)$. Тогда составляющие деформации, согласно формулам (10.10), примут вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}; \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \kappa_\theta &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{R} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

Исключим из формул (в) перемещения. Для этого формулы (в) продифференцируем следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial s} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial s^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial s^2}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial \gamma_{x\theta}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \gamma_{x\theta}}{\partial x \partial s} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial s^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial s}; \\ \frac{\partial^2 \kappa_\theta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{г})$$

Складывая вторую и третью формулы (г), получаем

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial s^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Отсюда, используя пятую формулу (г), находим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = R \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial s^2} + R \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x^2} - R \frac{\partial^2 \gamma_{x\theta}}{\partial x \partial s}. \quad (\text{д})$$

Рассматривая совместно первую и четвертую формулы (г) и исключая из них u , находим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{x\theta}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial s}. \quad (\text{е})$$

Подставляя затем производные (д) и (е) в последнюю формулу (г), получаем дифференциальное уравнение неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial s^2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial s} \right) - \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2 \gamma_{x\theta}}{\partial s \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_{x\theta}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(R \frac{\partial^2 \epsilon_\theta}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \kappa_\theta}{\partial x^2} = 0.$$

Используя геометрические гипотезы (б), получаем

$$\Omega \epsilon_x + \frac{\partial^2 \kappa_\theta}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{ж})$$

Дифференциальное уравнение (ж) показывает, что изгиб элементарной поперечной полоски (деформация контура) сопровождается растяжением оболочки вдоль образующей (депланация поперечного сечения).

Физические уравнения теории оболочек можно представить в упрощенной форме, как это показано в § 6, считая коэффициент Пуассона $\nu = 0$. Тогда из формул (10.11) находим:

$$\epsilon_x = -\frac{N_x}{Eh}; \quad \kappa_\theta = \frac{M}{D}.$$

Внося эти значения в уравнение (ж) и присоединяя уравнение (а), получаем систему двух совместных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 (\sigma h)}{\partial x^2} - \Omega M &= P; \\ \Omega \sigma + \frac{E}{D} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Здесь напряжение $\sigma = \frac{N_x}{h}$, где h — толщина оболочки.

При $R = \text{const}$ (для круговой оболочки) уравнения (10.25) будут иметь постоянные коэффициенты. Рассмотрим решение системы вариационным методом Бубнова—Галеркина в форме, разработанной для оболочек В. З. Власовым. В этом случае искомые функции представляются в виде произведения двух функций:

$$\begin{aligned} M(x, s) &= M(s) X(x); \quad u(x, s) = u(s) X'(x); \\ \sigma(x, s) &= \sigma(s) X''(x); \quad S(x, s) = S(s) X'''(x), \end{aligned}$$

из которых первые зависят только от переменной s , а вторые — от переменной x . Одна из двух функций приближенно задается, а вторая определяется из дифференциальных уравнений.

В. З. Власов предложил задаваться функцией $X(x)$, используя фундаментальные функции поперечных колебаний балки, которые являются решением однородного дифференциального уравнения

$$X^{IV} - (m^4/l^4) X = 0,$$

где l — длина оболочки в направлении образующей; m — произвольный параметр.

Это уравнение совместно с граничными условиями на криволинейных краях оболочки в каждом конкретном случае краевой задачи будет давать систему ортогональных фундаментальных функций $X_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots, \infty$), каждая из которых определяется своим фундаментальным числом m_n ($n = 1, 2, 3, \dots, \infty$). Так, например, для оболочки, имеющей на криволинейных краях шарнирное опирание, граничные условия таковы: при $x = 0$ и $x = l$ $M = \sigma = 0$. Фундаментальные функции в этом случае чисто тригонометрические:

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/l).$$

Если оба криволинейных края жестко защемлены, то при $x = 0$ и $x = l$ $M = u = 0$ и фундаментальные функции принимают вид

$$X_n(x) = (\operatorname{ch} m_n - \cos m_n) \left(\sin \frac{m_n x}{l} - \operatorname{sh} \frac{m_n x}{l} \right) - (\operatorname{sh} m_n - \sin m_n) \left(\cos \frac{m_n x}{l} - \operatorname{ch} \frac{m_n x}{l} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty),$$

где $m_1 = 4,73$; $m_2 = 7,853$; ...; $m_n = (2n + 1) \pi/2$ ($n > 2$).

Для оболочки, у которой один край шарнирно оперт, а другой — жестко заделан, граничные условия имеют вид

$$\text{при } x = 0 \quad M = \sigma = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad M = u = 0$$

и фундаментальные функции принимают такой вид:

$$X_n(x) = \sin m_n \operatorname{sh} \frac{m_n x}{l} - \cos m_n \operatorname{ch} \frac{m_n x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty),$$

где $m_1 = 3,927$; $m_2 = 7,068$; ...; $m_n = (4n + 1) \pi/2$ ($n > 2$).

Подобным образом строятся фундаментальные функции и при других граничных условиях. Фундаментальные функции, полученные указанным путем, а также их вторые производные обладают свойством ортогональности:

$$\int_0^l X_i(x) X_k(x) dx = 0; \quad \int_0^l X_i''(x) X_k''(x) dx = 0 \quad (i \neq k). \quad (3)$$

Для отыскания функций переменной s представляем их вместе с функцией (10.24) в виде бесконечных рядов:

$$\begin{aligned} M(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n(s) X_n(x); \quad \sigma(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(s) X_n''(x); \quad P(x, s) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(s) X_n(x). \end{aligned} \quad (10.26)$$

Умножая первое уравнение (10.25) на $X_n(x)$, а второе — на $X_n''(x)$, интегрируем эти выражения по всей длине оболочки. С учетом интегралов (3) получаем систему двух обыкновенных дифферен-

циальных уравнений, выраженных относительно искомым функций $M_n(s)$ и $\sigma_n(s)$:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n^4 h \sigma_n(s) - \Omega M_n(s) &= P_n(s); \\ \Omega \sigma_n(s) + \frac{E}{D} M_n(s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.27)$$

Здесь

$$\lambda_n^4 = m_n^4 / l^4; \quad P_n(s) = \frac{\int_0^l P(x, s) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}$$

При интегрировании системы (10.27) появятся восемь произвольных постоянных. Для их определения используются граничные условия на продольных краях оболочки. Число этих условий в каждой точке одного края равно четырем. Эти условия могут быть статическими, геометрическими и смешанными.

Таким образом, задача о равновесии длинной цилиндрической оболочки при любых заданных граничных условиях и при действии произвольной нагрузки полностью разрешима.

§ 10. Расчет оболочек вращения на симметричную нагрузку по моментной теории

Рассмотрим равновесие элемента $abcd$, вырезанного из оболочки вращения двумя смежными меридиональными плоскостями и двумя сечениями, перпендикулярными меридианам (рис. 94).

Ввиду осевой симметрии на сторонах элемента, расположенных в меридиональных плоскостях, действуют только нормальные силы $N_2 R_1 d\varphi$ и изгибающие моменты $M_2 R_1 d\varphi$, не зависящие от угла θ . На стороне ab действуют нормальная сила $N_1 r d\theta$, изгибающий момент $M_1 r d\theta$ и поперечная сила $Q_1 r d\theta$, а на стороне cd — нормальная сила $(N_1 + \frac{dN_1}{d\varphi} d\varphi) (r + \frac{dr}{d\varphi} d\varphi)$,

изгибающий момент $(M_1 +$

$+\frac{dM_1}{d\varphi} d\varphi) (r + \frac{dr}{d\varphi} d\varphi) d\theta$ и поперечная сила $(Q_1 + \frac{dQ_1}{d\varphi} d\varphi) (r +$

$+\frac{dr}{d\varphi} d\varphi) d\theta$. Составляющих поверхностной нагрузки благодаря симметрии будет две: касательная к меридиану $Y_v r d\theta R_1 d\varphi$ и нормальная к срединной поверхности оболочки $Z_v r d\theta R_1 d\varphi$.

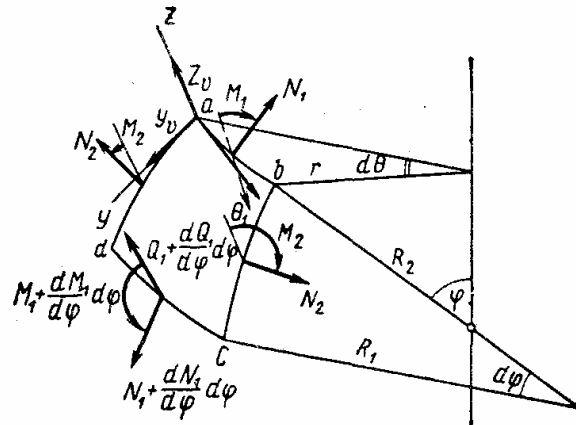


Рис. 94

Сумма проекций всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу:

на ось y

$$\begin{aligned} & \left(N_2 + \frac{dN_2}{d\varphi} d\varphi\right) \left(r + \frac{dr}{d\varphi} d\varphi\right) d\theta - N_1 r d\theta - N_2 R_1 d\varphi \cos \varphi d\theta + \\ & + \left(Q_1 + \frac{dQ_1}{d\varphi} d\varphi\right) \left(r + \frac{dr}{d\varphi} d\varphi\right) d\theta d\varphi + Y_v r d\theta R_1 d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (a)$$

на ось z

$$\begin{aligned} & \left(Q_1 + \frac{dQ_1}{d\varphi} d\varphi\right) \left(r + \frac{dr}{d\varphi} d\varphi\right) d\theta - Q_1 r d\theta - N_2 R_1 d\varphi \sin \varphi d\theta - \\ & - \left(N_1 + \frac{dN_1}{d\varphi} d\varphi\right) \left(r + \frac{dr}{d\varphi} d\varphi\right) d\theta d\varphi + Z_v r d\theta R_1 d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (б)$$

Сумма моментов всех сил относительно оси x .

$$\begin{aligned} & \left(M_1 + \frac{dM_1}{d\varphi} d\varphi\right) \left(r + \frac{dr}{d\varphi} d\varphi\right) d\theta - M_1 r d\theta - M_2 R_1 d\varphi \cos \varphi d\theta - \\ & - \left(Q_1 + \frac{dQ_1}{d\varphi} d\varphi\right) \left(r + \frac{dr}{d\varphi} d\varphi\right) d\theta R_1 d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (в)$$

После упрощения уравнений (а), (б) и (в) получаем следующие уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_1 r) - N_2 R_1 \cos \varphi + Q_1 r + Y_v r R_1 &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q_1 r) - N_1 r - N_2 R_1 \sin \varphi + Z_v r R_1 &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (M_1 r) - M_2 R_1 \cos \varphi - Q_1 r R_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.28)$$

В эти три уравнения входят пять неизвестных усилий: N_1 , N_2 , M_1 , M_2 и Q_1 . Следовательно, задача статически неопределима и для ее решения необходимо рассмотреть еще уравнения деформаций.

В случае симметричной деформации оболочки вращения в каждой точке возникнут только две составляющие перемещения: v — перемещение по направлению касательной к меридиану (тангенциальное перемещение) и w — перемещение по направлению нормали к срединной поверхности оболочки (радиальное перемещение).

Рассмотрим деформацию элемента AB меридиана (рис. 95). Удлинение вследствие тангенциальных перемещений точек A и B равно $\frac{dv}{d\varphi} d\varphi$, а вследствие радиальных — $w d\varphi$.

Полное удлинение элемента AB равно сумме $\frac{dv}{d\varphi} d\varphi + w d\varphi$. Разделив эту сумму на первоначальную длину $R_1 d\varphi$ элемента, находим линейную деформацию оболочки в меридиональном направлении:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{R_1}.$$

Вследствие перемещений v и w радиус r параллельного круга возрастает на величину $v \cos \varphi + w \sin \varphi$. Длина окружности параллельного круга возрастает в том же отношении, что и радиус. Поэтому линейная деформация в кольцевом направлении

$$\varepsilon_2 = (v \cos \varphi + w \sin \varphi)/r,$$

или после подстановки $r = R_2 \sin \varphi$

$$\varepsilon_2 = (v/R_2) \operatorname{ctg} \varphi + w/R_2.$$

Кроме линейных деформаций происходит изменение кривизны оболочки. Вследствие перемещений сторона ab элемента (см. рис. 94) поворачивается относительно оси x на угол

$$\psi = \frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi}. \quad (10.29)$$

Угол поворота стороны cd будет отличаться на бесконечно малую величину:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} + \\ &+ \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Разделив разность углов поворота этих сторон на первоначальную длину $R_1 d\varphi$ дуги bc , найдем изменение кривизны меридиана:

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} \right).$$

Каждая из боковых сторон элемента $abcd$ благодаря симметрии повернется в меридиональной плоскости на угол φ . При этом угол их поворота относительно оси y составит

$$\left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} \right) \cos \varphi d\theta.$$

а изменение кривизны в плоскости, перпендикулярной меридиану, будет равно

$$\kappa_2 = \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} \right) \frac{\cos \varphi}{r} = \left(\frac{v}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} \right) \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R_2}.$$

Таким образом, получаем четыре формулы, дающие связь между деформациями и перемещениями в оболочке вращения, находящейся

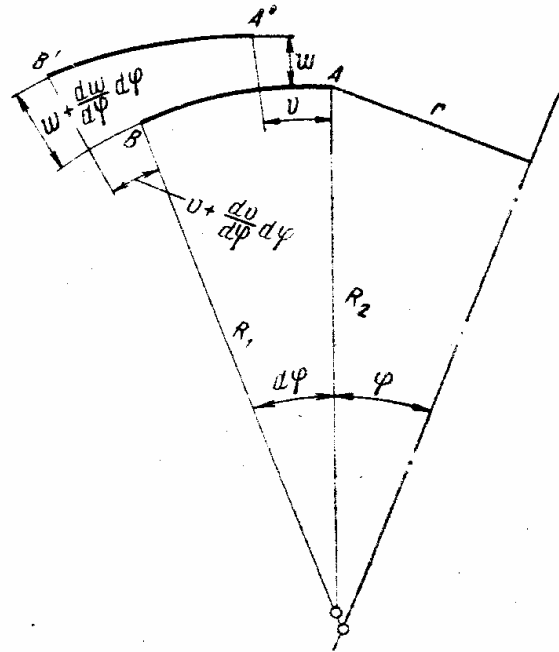


Рис. 95

под действием нагрузки, симметричной относительно оси:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{dv}{d\varphi} + \omega \right); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R_2} (v \operatorname{ctg} \varphi + \omega); \\ \kappa_1 &= \frac{1}{R_1^2} \frac{d}{d\varphi} \left(v - \frac{d\omega}{d\varphi} \right); \\ \kappa_2 &= \frac{1}{R_1 R_2} \left(v - \frac{d\omega}{d\varphi} \right) \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

Чтобы установить связь между усилиями и деформациями, воспользуемся упрощенными физическими уравнениями теории тонких оболочек (10.11), которые в данном случае будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= [Eh/(1-\nu^2)] (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \\ N_2 &= [Eh/(1-\nu^2)] (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1); \\ M_1 &= D (\kappa_1 + \nu\kappa_2); \\ M_2 &= D (\kappa_2 + \nu\kappa_1). \end{aligned} \right\} \quad (10.31)$$

Формулы (10.28), (10.30) и (10.31) представляют собой систему 11 уравнений с 11 неизвестными: N_1 , N_2 , M_1 , M_2 , Q_1 , ε_1 , ε_2 , κ_1 , κ_2 , v , ω . Подставляя формулы (10.31) и (10.30) в уравнение (10.28), можно получить систему трех уравнений с тремя неизвестными: v , ω , Q_1 .

§ 11. Понятие о краевом эффекте. Краевой эффект в сферической и цилиндрической оболочках

Решение системы уравнений предыдущего параграфа позволяет определить усилия и напряжения в симметрично нагруженной оболочке вращения по моментной теории. Сравнение напряжений, получаемых по моментной и безмоментной теориям, приводит к выводу, что в тонких оболочках они мало отличаются. Таким образом, можно считать, что безмоментная теория дает удовлетворительные результаты, если граничные условия являются безмоментными, т. е. обеспечивают краям оболочки свободные перемещения в направлении нормали к поверхности.

Рассмотрим теперь напряженное состояние оболочки вращения, край которой закреплен от смещения в направлении нормали к поверхности. В закреплении возникают реакции, которые вызывают напряженное состояние, связанное с изгибом и быстро затухающее при удалении от края. Такое напряженное состояние, как уже отмечалось в § 8, носит название *краевого эффекта*.

Область затухания краевых эффектов оказывается очень узкой: для достаточно тонких оболочек она исчисляется долями R . Краевой эффект — совершенно особое явление, характерное лишь для тонких оболочек. Он не связан с принципом Сен-Венана, а обусловлен только малой толщиной оболочки и искривлением ее срединной поверхности.

Составим основные уравнения, описывающие рассматриваемое напряженное состояние. В задаче о краевом эффекте поверхностная нагрузка отсутствует и уравнения равновесия (10.28) являются однородными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_1 R_2 \sin \varphi) - N_2 R_1 \cos \varphi + Q_1 R_2 \sin \varphi &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q_1 R_2 \sin \varphi) - N_1 R_2 \sin \varphi - N_2 R_1 \sin \varphi &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (M_1 R_2 \sin \varphi) - M_2 R_1 \cos \varphi - Q_1 R_1 R_2 \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} (10.32)$$

В качестве геометрических соотношений воспользуемся уравнениями (10.30), добавив к ним выражение (10.29), представляющее собой изменение угла наклона касательной к меридиану после деформирования. Значение ψ удобно использовать для упрощения решения, так как через него могут быть выражены изменения кривизны:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{R_1} \frac{d\psi}{d\varphi}; \\ \kappa_2 &= \frac{\psi}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \right\} (10.33)$$

Для определения ψ обратимся к рис. 96, где показан элемент меридиана оболочки до и после деформирования. Из чертежа следует, что до деформирования

$$\cos \varphi = \frac{BC}{AB} = \frac{dr}{R_1 d\varphi}. \quad (a)$$

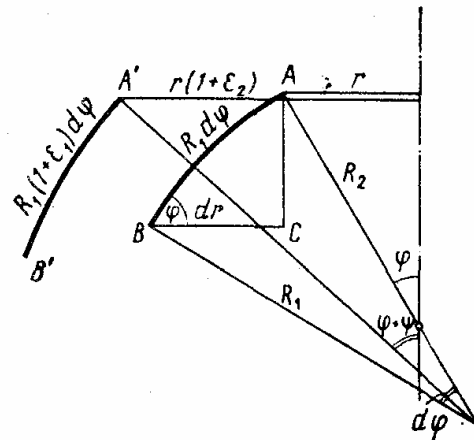


Рис. 96

После деформирования угол φ изменяется до $\varphi + \psi$, радиус r становится равным $r(1 + \epsilon_2)$, длина дуги меридиана $R_1 d\varphi$ возрастает до $R_1(1 + \epsilon_1) d\varphi$ и соотношение (a) принимает вид

$$\cos(\varphi + \psi) = \frac{d[r(1 + \epsilon_2)]}{R_1(1 + \epsilon_1) d\varphi},$$

или

$$(1 + \epsilon_1)(\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) = \frac{r}{R_1} \frac{d\epsilon_2}{d\varphi} + \frac{1 + \epsilon_2}{R_1} \frac{dr}{d\varphi}.$$

После упрощения с учетом малости деформаций ($\cos \psi \approx 1$, $\sin \psi \approx \psi$) получаем

$$\epsilon_1 \cos \varphi - \psi \sin \varphi = \frac{R_2}{R_1} \sin \varphi \frac{d\epsilon_2}{d\varphi} + \epsilon_2 \cos \varphi,$$

откуда

$$\psi = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{R_2}{R_1} \frac{d\epsilon_2}{d\varphi}. \quad (10.34)$$

В качестве физических зависимостей используем уравнения (10.31). Таким образом, получаем систему 12 уравнений: (10.30), (10.31), (10.32) и (10.34) для определения 12 неизвестных функций: пяти усилий (N_1, N_2, M_1, M_2, Q_1), четырех деформаций ($\epsilon_1, \epsilon_2, \kappa_1, \kappa_2$), двух перемещений (v, w) и изменения угла наклона касательной к меридиану (ψ).

Интегрирование этой системы уравнений представляет значительные трудности. Точное решение задачи показывает, что у края возникает напряженное состояние, имеющее форму быстро затухающего колебания при удалении от этого края. Это позволяет построить приближенную теорию расчета краевого эффекта. Анализ функций, характеризующих затухание колебания с большим коэффициентом затухания, показывает, что значение производной такой функции всегда больше значения самой функции на величину коэффициента затухания. Поэтому при суммировании усилий, деформаций и перемещений в оболочке с их производными можно принимать во внимание лишь производные высшего порядка.

Однако приближенная теория краевого эффекта имеет ограниченное применение. Она дает хорошие результаты лишь при $\varphi > 30^\circ$. В этом случае в выражении (10.34) $\operatorname{ctg} \varphi$ не мешает пренебречь линейными деформациями ϵ_1 и ϵ_2 по сравнению с производной $d\epsilon_2/d\varphi$ и указанное выражение может быть представлено в упрощенной форме:

$$\psi = -\frac{R_2}{R_1} \frac{d\epsilon_2}{d\varphi}. \quad (6)$$

Таким же образом упростим все остальные уравнения краевого эффекта. Исключив из первых двух уравнений равновесия (10.32) усилие N_2 , получим

$$\frac{d}{d\varphi} (N_1 R_2 \sin \varphi) + N_1 R_2 \cos \varphi + Q_1 R_2 \sin \varphi - \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} (Q_1 R_2 \sin \varphi) = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\varphi} (N_1 R_2 \sin^2 \varphi) = \frac{d}{d\varphi} (Q_1 R_2 \sin \varphi \cos \varphi).$$

После интегрирования находим

$$N_1 = Q_1 \operatorname{ctg} \varphi + C/(R_2 \sin^2 \varphi).$$

При расчете оболочки вращения по безмоментной теории, когда $Q_1 = 0$, произвольная постоянная C пропорциональна равнодействующей поверхностных сил. Так как задача о краевом эффекте является однородной, то эта равнодействующая равна нулю, а значит, и постоянная тоже равна нулю. Таким образом,

$$N_1 = Q_1 \operatorname{ctg} \varphi. \quad (B)$$

Подставив это выражение во второе уравнение равновесия, получаем

$$\frac{d}{d\varphi} (Q_1 R_2 \sin \varphi) - Q_1 R_2 \cos \varphi - N_2 R_1 \sin \varphi = 0,$$

откуда после указанных упрощений

$$N_2 = \frac{R_2}{R_1} \frac{dQ_1}{d\varphi}. \quad (г)$$

Из первых двух формул (10.31) имеем

$$\varepsilon_2 = (N_2 - \nu N_1)/(Eh).$$

После подстановки усилий (в) и (г) получаем

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{R_2}{R_1} \frac{dQ_1}{d\varphi} - \nu Q_1 \operatorname{ctg} \varphi \right) / (Eh),$$

или после упрощения

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} \frac{R_2}{R_1} \frac{dQ_1}{d\varphi}. \quad (д)$$

Из третьего уравнения равновесия (10.32) после дифференцирования и упрощения находим

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \frac{dM_1}{d\varphi}. \quad (е)$$

Третья формула (10.31) после подстановки в нее значений изменения кривизны (10.33) принимает вид

$$M_1 = D \left(\frac{1}{R_1} \frac{d\psi}{d\varphi} + \nu \frac{\psi}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi \right),$$

или после упрощения

$$M_1 = \frac{D}{R_1} \frac{d\psi}{d\varphi}. \quad (ж)$$

Подставив выражение (ж) в (е), после упрощения получим

$$Q_1 = \frac{D}{R_1^2} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2}. \quad (з)$$

Подставив выражение (з) в (д), найдем

$$\varepsilon_2 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{R_2}{R_1^3} \frac{d^3 \psi}{d\varphi^3}.$$

Внося последнее равенство в формулу (б), получим приближенное дифференциальное уравнение краевого эффекта:

$$\frac{R_2^4}{R_1^4} \frac{d^4 \psi}{d\varphi^4} + 4\kappa^4 \psi = 0, \quad (10.35)$$

где

$$\kappa^4 = 3(1-\nu^2) R_2^2 / h^2.$$

Уравнение (10.35) можно выразить относительно поперечной силы Q_1 . Для этого нужно в выражение (з) подставить последовательно формулы (б) и (д). В результате после упрощений получим

$$\frac{R_2^4}{R_1^4} \frac{d^4 Q_1}{d\varphi^4} + 4\kappa^4 Q_1 = 0. \quad (10.36)$$

Рассмотрим решение записанного уравнения для сферической оболочки. В этом случае радиусы кривизны одинаковы: $R_1 = R_2 = R$, а уравнение (10.36) принимает вид

$$\frac{d^4 Q_1}{d\varphi^4} + 4\kappa^4 Q_1 = 0.$$

Его решение можно представить в такой форме:

$$Q_1 = e^{\kappa\varphi} (A_1 \cos \kappa\varphi + B_1 \sin \kappa\varphi) + e^{-\kappa\varphi} (C_1 \cos \kappa\varphi + D_1 \sin \kappa\varphi). \quad (и)$$

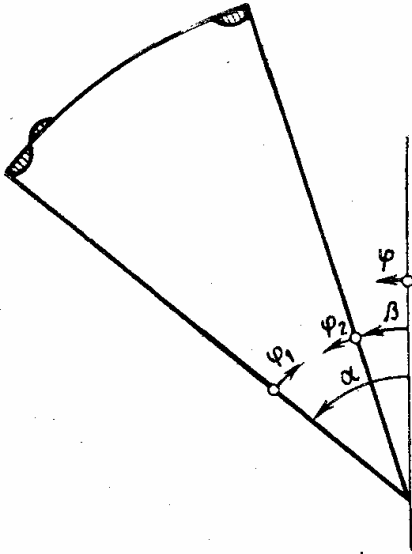


Рис. 97

Для удобства дальнейших расчетов введем новые переменные φ_1 и φ_2 . Согласно рис. 97, $\varphi_1 = \alpha - \varphi$, $\varphi_2 = \varphi - \beta$. Тогда решение (и) будет выглядеть так:

$$Q_1 = e^{-\kappa\varphi_1} (A \cos \kappa\varphi_1 + B \sin \kappa\varphi_1) + e^{-\kappa\varphi_2} (C \cos \kappa\varphi_2 + D \sin \kappa\varphi_2). \quad (10.37)$$

Оно состоит из двух частей: первая представляет собой колебания, затухающие от нижнего края, а вторая — от верхнего. Следовательно, если интересует краевой эффект у нижнего края, то надо пользоваться первой частью решения (10.37), которая зависит от φ_1 :

$$Q_1 = e^{-\kappa\varphi_1} (A \cos \kappa\varphi_1 + B \sin \kappa\varphi_1). \quad (10.38)$$

Для верхнего края берется вторая часть решения, зависящая от φ_2 :

$$Q_1 = e^{-\kappa\varphi_2} (C \cos \kappa\varphi_2 + D \sin \kappa\varphi_2). \quad (10.39)$$

С помощью полученных формул легко вычисляются угол ψ и остальные усилия. Так, для нижнего края сферической оболочки

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{Eh} \frac{d^2 Q_1}{d\varphi_1^2} = \frac{2}{Eh} \kappa^2 e^{-\kappa\varphi_1} (B \cos \kappa\varphi_1 - A \sin \kappa\varphi_1); \\ N_1 &= Q_1 \operatorname{ctg} \varphi = e^{-\kappa\varphi_1} (A \cos \kappa\varphi_1 + B \sin \kappa\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi; \\ N_2 &= \frac{dQ_1}{d\varphi} = -\frac{dQ_1}{d\varphi_1} = \kappa e^{-\kappa\varphi_1} [(A - B) \cos \kappa\varphi_1 + (A + B) \sin \kappa\varphi_1]; \\ M_1 &= -\frac{D}{R} \frac{d\psi}{d\varphi_1} = \frac{h^2 \kappa^3}{6(1-\nu^2)R} e^{-\kappa\varphi_1} [(A + B) \cos \kappa\varphi_1 + \\ &\quad + (B - A) \sin \kappa\varphi_1]; \\ M_2 &= \nu M_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

Для верхнего края

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{2}{Eh} \kappa^2 e^{-\kappa \varphi_2} (D \cos \kappa \varphi_2 - C \sin \kappa \varphi_2); \\ N_1 &= e^{-\kappa \varphi_2} (C \cos \kappa \varphi_2 + D \sin \kappa \varphi_2) \operatorname{ctg} \varphi; \\ N_2 &= -\kappa e^{-\kappa \varphi_2} [(C - D) \cos \kappa \varphi_2 + (C + D) \sin \kappa \varphi_2]; \\ M_1 &= -\frac{h^2 \kappa^3}{6(1-\nu^2)R} e^{-\kappa \varphi_2} [(C + D) \cos \kappa \varphi_2 + (D - C) \sin \kappa \varphi_2]; \\ M_2 &= \nu M_1. \end{aligned} \right\} (10.41)$$

Дальнейший ход решения задачи заключается в следующем. Производится расчет оболочки по безмоментной теории: из уравнений (10.3) определяются усилия N_1^0 и N_2^0 . Общее решение задачи получается суммированием усилий краевого эффекта и усилий, полученных по безмоментной теории. Затем из граничных условий определяются произвольные постоянные общего решения.

Для исследования краевого эффекта в цилиндрической оболочке воспользуемся уравнением (10.16). Соответствующее ему однородное уравнение

$$\frac{d^4 \omega}{d\xi^4} + 4\omega = 0$$

имеет решение в виде

$$\omega = e^{-\xi} (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi) + e^{\xi} (C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi). \quad (\kappa)$$

Аналогично представлению функции (10.37) в виде двух независимых решений (10.38) и (10.39), решение (к) также можно разбить на два:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{I}} &= e^{-\xi_1} (C_1 \cos \xi_1 + C_2 \sin \xi_1); \\ \omega_{\text{II}} &= e^{-\xi_2} (C_3 \cos \xi_2 + C_4 \sin \xi_2). \end{aligned}$$

Первое из них справедливо, например, для левого края оболочки, от которого отсчитывается координата ξ_1 ; второе справедливо для правого края, откуда отсчитывается координата ξ_2 .

После этого по формулам (10.13) определяются усилия краевого эффекта: для левого края

$$\begin{aligned} M_x &= 2\alpha^2 D e^{-\xi_1} (C_2 \cos \xi_1 - C_1 \sin \xi_1); \\ Q_x &= \frac{dM_x}{dx} = -2\alpha^3 D e^{-\xi_1} [(C_1 + C_2) \cos \xi_1 - (C_1 - C_2) \sin \xi_1]; \\ N_\theta &= (Eh/R) e^{-\xi_1} (C_1 \cos \xi_1 + C_2 \sin \xi_1); \end{aligned}$$

для правого

$$\begin{aligned} M_x &= 2\alpha^2 D e^{-\xi_2} (C_4 \cos \xi_2 - C_3 \sin \xi_2); \\ Q_x &= -2\alpha^3 D e^{-\xi_2} [(C_3 + C_4) \cos \xi_2 - (C_3 - C_4) \sin \xi_2]; \\ N_\theta &= (Eh/R) e^{-\xi_2} (C_3 \cos \xi_2 + C_4 \sin \xi_2). \end{aligned}$$

Общее решение задачи получается суммированием усилий краевого эффекта и усилий, полученных по безмоментной теории, так же как это было показано для сферической оболочки. Существование краевого эффекта у защемленного края замкнутой круговой цилиндрической оболочки подтверждает ранее рассмотренный рис. 90. Даже в короткой оболочке изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_x быстро затухают при удалении от защемленного края. У нормальной силы N_θ затухает та часть усилия, которая вызывается краевым эффектом (на рисунке ей соответствует эпюра, изображенная сплошной линией).

§ 12. Элементы теории пологих оболочек Власова

Пологой называется оболочка, у которой стрела подъема не превышает наименьшего линейного размера в плане. Согласно рис. 75, $f_0 \leq l_2/5$.

Напряженное состояние пологой оболочки является переходным от невыгодного чисто моментного напряженного состояния пластинки к выгодному безмоментному напряженному состоянию оболочки. Этим и объясняется широкое распространение в строительстве пологих оболочек как конструкций, в которых соединяется преимущество пластинок в смысле распределения материала по перекрываемой площади с преимуществом оболочек в смысле распределения напряжений по толщине.

Ограничимся рассмотрением пологих оболочек с прямоугольным планом, которые наиболее распространены в строительстве. Теория пологих оболочек создана В. З. Власовым и основывается на следующих гипотезах, дополняющих основные:

1. Оболочка принимается настолько полой, что геометрию ее поверхности можно приближенно считать совпадающей с геометрией плоскости ее проекции. Это значит, что для квадрата линейного элемента (см. § 2 данной главы) полой оболочки с прямоугольным планом вместо выражения

$$(ds)^2 = A^2 (d\alpha)^2 + B^2 (d\beta)^2$$

можно принять

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,$$

т. е. считать, что $A = B = 1$, а координаты α и β равны соответственно x и y . Это означает также, что в исходных уравнениях гауссова кривизна

$$\Gamma = k_1 k_2 \approx 0.$$

2. В уравнениях равновесия можно отбросить члены, содержащие поперечные силы.

3. В выражениях для изгибных деформаций достаточно сохранить только члены, содержащие перемещения в направлении нормали к срединной поверхности оболочки.

На рис. 79 и 98 показаны усилия, действующие на бесконечно малый элемент срединной поверхности полой оболочки с прямоуголь-

ным планом. Рассматривая оба рисунка совместно и учитывая принятые гипотезы, получим следующие уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X_v &= 0; \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + Y_v &= 0; \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} - k_1 N_1 - k_2 N_2 + Z_v &= 0; \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= Q_1; \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

Два первых уравнения вытекают из (е) и (ж) § 3 данной главы при замене $Rd\theta$ на dy и при устремлении R к бесконечности.

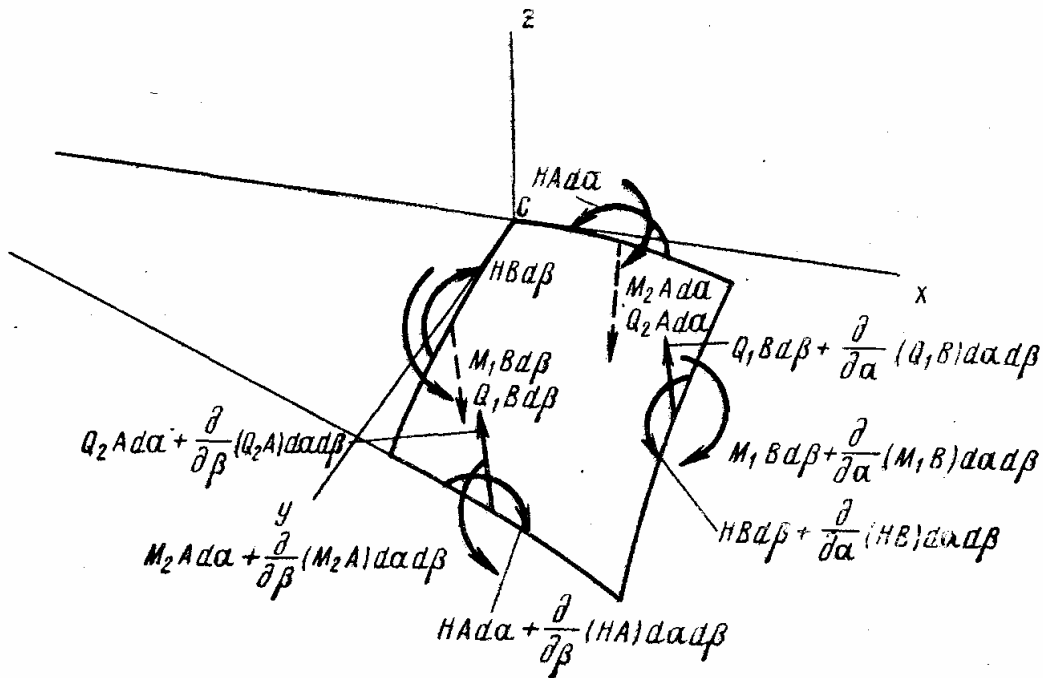


Рис. 98

Два последних уравнения получены аналогично уравнениям (8.13) и (8.14), а среднее уравнение представляет собой сумму уравнений (8.12) и (ж) из § 3.

Вывод геометрических уравнений можно проделать аналогично тому, как это сделано для цилиндрической оболочки (см. § 4 данной главы). С учетом принятой гипотезы геометрические уравнения полу-

чаются в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \kappa_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \chi &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (10.43)$$

Физические уравнения получим из уравнений (10.11), введя в них соответствующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= [Eh/(1-\nu^2)] (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); \\ N_2 &= [Eh/(1-\nu^2)] (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1); \\ S &= \{Eh/[2(1+\nu)]\} \gamma; \\ M_1 &= D (\kappa_1 + \nu \kappa_2); \\ M_2 &= D (\kappa_2 + \nu \kappa_1); \\ H &= D (1-\nu) \chi. \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$

Система уравнений (10.42)—(10.44) может быть сведена к двум разрешающим уравнениям с двумя неизвестными функциями w и φ . Функция напряжений φ вводится аналогично тому, как это делалось в плоской задаче теории упругости (см. § 3, гл. VI). Усилия безмоментного напряженного состояния выражаются через функцию φ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ N_2 &= h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ S &= -h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (10.45)$$

В практических задачах поверхностная нагрузка чаще всего нормальна к срединной поверхности оболочки. Ограничиваясь только такими задачами, примем: $X_\nu = Y_\nu = 0$, $Z_\nu = q$. В этом случае усилия N_1 , N_2 , S в формуле (10.45) тождественно удовлетворяют первым двум уравнениям равновесия (10.42), а третье уравнение после под-

становки в него усилий (10.44) и деформаций из формул (10.43) приобретает вид

$$D\nabla^2\nabla^2\omega + h\nabla_k^2\varphi = q, \quad (a)$$

где операторы обозначают:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \\ \nabla_k^2 &= k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.46)$$

Для вывода второго разрешающего уравнения исключим из первых трех соотношений (10.43) составляющие перемещения, как это делалось при выводе уравнений неразрывности деформаций (см. § 3, гл. II). В результате получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} + k_1 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + k_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}.$$

Заменяя в этом уравнении деформации усилиями с помощью формул (10.44), а затем усилия функцией напряжений с помощью формул (10.45), найдем

$$(1/E)\nabla^2\nabla^2\varphi - \nabla_k^2\omega = 0. \quad (б)$$

Таким образом, получаем основную систему уравнений (а) и (б) теории пологих оболочек:

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2\omega + h\nabla_k^2\varphi &= q; \\ (1/E)\nabla^2\nabla^2\varphi - \nabla_k^2\omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.47)$$

Эти уравнения справедливы для оболочек, имеющих постоянные кривизны k_1 и k_2 , и для оболочек, срединная поверхность которых образована перемещением плоской кривой по произвольной направляющей с сохранением параллельности этой кривой ее первоначальному положению (оболочки переноса).

Если срединная поверхность оболочки задана произвольной функцией $z = z(x, y)$, то кривизны также будут функциями двух переменных. В этом случае дифференциальные операторы (10.46) примут иной вид.

Система дифференциальных уравнений (10.47) обобщает две задачи теории упругости: плоскую задачу и задачу об изгибе пластинки. Действительно, полагая главные кривизны оболочки равными нулю, получаем $\nabla_k^2 = 0$, а система распадается на два независимых уравнения:

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2\omega &= q; \\ \nabla^2\nabla^2\varphi &= 0, \end{aligned} \right\}$$

первое из которых представляет собой уравнение Софи Жермен для изгибаемой пластинки, а второе — бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости.

Решение системы (10.47) представляет большие трудности, поэтому целесообразно применять вариационные методы решения: метод Бубнова—Галеркина или метод Ритца—Тимошенко. Рассмотрим решение задачи для полой оболочки методом Бубнова—Галеркина в форме, разработанной для оболочек В. З. Власовым.

Функции напряжений и прогибов представим в форме бесконечных рядов:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \varphi_{mn} = \sum_m \sum_n A_{mn} X_m(x) Y_n(y);$$

$$\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \omega_{mn} = \sum_m \sum_n B_{mn} U_m(x) V_n(y).$$

Здесь функции $X_m(x)$, $Y_n(y)$, $U_m(x)$, $V_n(y)$ являются линейными комбинациями фундаментальных балочных функций, представляющих собой решения дифференциальных уравнений свободных колебаний балок и удовлетворяющих условиям закрепления соответствующих краев оболочки (см. § 9 данной главы).

Постоянные A_{mn} и B_{mn} определяются из системы вариационных уравнений Бубнова—Галеркина:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \nabla_k^2 \omega \right) \varphi_{mn} dx dy &= 0; \\ \int_0^a \int_0^b (D \nabla^2 \nabla^2 \omega + h \nabla_k^2 \varphi - q) \omega_{mn} dx dy &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.48)$$

где a и b — размеры оболочки в плане.

Поскольку фундаментальные балочные функции, а также их вторые и четвертые производные обладают свойством ортогональности, то в системе уравнений (10.48) исчезнут все коэффициенты, имеющие разные индексы. В результате для определения каждого оставшегося коэффициента сохранится по два уравнения следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} \delta_{mn} - B_{mn} \delta'_{mn} &= 0; \\ A_{mn} r'_{mn} + B_{mn} r_{mn} &= \Delta_{mn}, \end{aligned} \right\} \quad (10.49)$$

где

$$\delta_{mn} = \int_0^a \int_0^b \frac{1}{E} (X_m^{IV} Y_n + 2X_m'' Y_n'' + X_m Y_n^{IV}) X_m Y_n dx dy;$$

$$\delta'_{mn} = \int_0^a \int_0^b (k_1 U_m V_n'' + k_2 U_m'' V_n) X_m Y_n dx dy;$$

$$r'_{mn} = \int_0^a \int_0^b h (k_1 X_m Y_n'' + k_2 X_m'' Y_n) U_m V_n dx dy;$$

$$r_{mn} = D \int_0^a \int_0^b (U_m^{IV} V_n + 2U_m'' V_n'' + U_m V_n^{IV}) U_m V_n dx dy;$$

$$\Delta_{mn} = C_{mn} \int_0^a \int_0^b q_{mn} U_m V_n dx dy;$$

$$q = \sum_m \sum_n C_{mn} q_{mn}.$$

Решив систему уравнений (10.49), найдем коэффициенты:

$$A_{mn} = \frac{\Delta_{mn} \delta'_{mn}}{\delta_{mn} r_{mn} + \delta'_{mn} r'_{mn}};$$

$$B_{mn} = - \frac{\Delta_{mn} \delta_{mn}}{\delta_{mn} r_{mn} + \delta'_{mn} r'_{mn}}.$$

§ 13. Понятие о расчете гибких пологих оболочек

Рассмотренная линейная теория оболочек не позволяет решить все проблемы их расчета. Так, вопросы потери устойчивости оболочек, связанной с большими деформациями, требуют применения нелинейной теории. Во многих случаях потеря устойчивости сопровождается появлением сравнительно мелких волн, размеры которых малы по сравнению с радиусами кривизны или с габаритными размерами оболочки. Поэтому в пределах каждой вмятины можно оболочку рассматривать как пологую и применять для расчета соответствующую теорию В. З. Власова с учетом геометрической нелинейности.

Дополняя геометрические соотношения теории пологих оболочек (10.43) нелинейными членами, получаем, как и в теории гибких пластинок [см. зависимости (8.36)]:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2;$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Исключая из этих уравнений составляющие перемещения u и v , приходим к уравнению неразрывности, связывающему деформации в срединной поверхности оболочки:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} L(w, w) + \nabla_k^2 w. \quad (a)$$

Здесь $L(w, w)$ — оператор, получаемый из выражения (8.39) заменой функции φ на w , а ∇_k^2 — оператор (10.46).

Вводя функцию напряжений φ в форме (10.45), с помощью формул (10.44) находим из уравнения (а)

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{1}{2} L(\omega, \omega) - \nabla_k^2 \omega = 0. \quad (б)$$

Исключая из уравнений равновесия (10.42) усилия с помощью соотношений (10.43)—(10.45), получаем

$$D \nabla^2 \nabla^2 \omega - hL(\omega, \varphi) + h \nabla_k^2 \varphi = q. \quad (в)$$

Уравнения (б) и (в) образуют систему нелинейных уравнений типа уравнений Кармана (8.38):

$$\left. \begin{aligned} D \nabla^2 \nabla^2 \omega - hL(\omega, \varphi) + h \nabla_k^2 \varphi &= q; \\ \frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{1}{2} L(\omega, \omega) - \nabla_k^2 \omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.50)$$

Первое из них выражает условие равновесия элемента оболочки, а второе — условие неразрывности деформаций.

Уравнения (10.50) обобщают систему (10.47) на случай оболочки с большими прогибами, а при значениях кривизн, равных нулю, превращаются в уравнения (8.38) для гибких пластинок.

РАЗДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

ГЛАВА XI

ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 1. Две задачи теории пластичности. Активная, пассивная и нейтральная деформации. Простое и сложное нагружения

Пластичностью называется свойство твердого тела изменять под внешними воздействиями, не разрушаясь, свою форму и размеры и сохранять остаточные (пластические) деформации после устранения этих воздействий. Теория пластичности является разделом механики, который устанавливает общие законы образования в твердых телах любой конфигурации пластических деформаций и возникающих на всех стадиях пластического деформирования напряжений, вызываемых различными внешними причинами (нагрузками, температурными воздействиями и др.). Теория пластичности в отличие от теории упругости рассматривает тела, которые по своей природе не подчиняются свойствам упругости. Если тело не подчиняется свойствам упругости с самого начала приложения к нему внешних воздействий, то оно называется *пластическим*. Диаграмма деформирования пластического тела показана на рис. 99. Если же тело в начале нагружения обладает упругими свойствами и лишь с некоторой стадии нагружения в нем появляются остаточные деформации, то оно называется *упругопластическим*. Диаграммы деформирования упругопластических тел изображены на рис. 100 и 101.

В теории пластичности ставятся две различные задачи: 1) изучение всего процесса деформирования тел (конструкций); 2) определение одной лишь несущей способности (фактической разрушающей нагрузки) конструкций.

В первой задаче рассматриваются определение напряжений, деформаций и перемещений от заданной нагрузки в любой момент деформирования, определение границы между упругой и пластической зонами, определение остаточных напряжений и деформаций при полном или частичном снятии нагрузки. Во второй задаче исследуется лишь предельное состояние тела без изучения промежуточных этапов деформирования.

чала их приложения возрастают одновременно, сохраняя между собой постоянное соотношение, т. е. изменяются пропорционально общему параметру. Такое изменение нагрузок обеспечивает постоянство направляющих тензоров напряжений и деформаций в каждой точке тела произвольной формы при любом количестве и любых направлениях внешних сил. Нагружение является сложным, если, например, при возрастании хотя бы одной из внешних сил остальные возрастают не пропорционально ей или если силы действуют не одновременно и т. п.

Исследованиями установлено, что влияние гидростатического давления на процесс пластического деформирования незначительно. Поэтому понятие простого нагружения может быть дано в несколько ослабленной форме. При простом нагружении компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально общему параметру. На практике часто приходится иметь дело со случаями, близкими к простому нагружению.

§ 2. Математический аппарат теории пластичности

Как и в теории упругости, математический аппарат теории пластичности состоит из трех групп уравнений. Это уравнения теории напряжений, теории деформаций и физические уравнения. Уравнения первых двух групп совпадают с соответствующими уравнениями теории упругости.

Напряженное состояние в каждой точке тела, находящегося под действием объемных X, Y, Z и поверхностных X_n, Y_n, Z_n сил, определяется шестью составляющими напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Эти шесть величин связаны тремя дифференциальными уравнениями равновесия (4.1), а на поверхности тела должны выполняться три условия (4.2).

Напряженное состояние в точке может быть охарактеризовано также тремя инвариантами напряженного состояния (1.12) или (1.13). В теории пластичности широко применяются такие инвариантные величины, как интенсивность касательных напряжений (1.22) и интенсивность напряжений (1.23).

Деформированное состояние в точке напряженного тела характеризуется шестью составляющими деформации: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Они связаны геометрическими соотношениями Коши (4.3) с составляющими перемещения u, v, w и должны удовлетворять шести уравнениям неразрывности деформаций (4.4). Основными, не связанными с системой координат характеристиками деформированного состояния в точке являются инварианты деформированного состояния (2.15) и инвариантные величины: интенсивность деформаций сдвига (2.16) и интенсивность деформаций (2.17).

Физические уравнения теории пластичности зависят от того, какая теория рассматривается. В настоящее время существуют две основные теории пластичности.

К первому виду можно отнести теорию упругопластических деформаций (или деформационную теорию), в основе которой лежат урав-

нения, связывающие напряжения и деформации. Эта теория справедлива при малых деформациях, когда тело несжимаемо и подвергается простому нагружению. Теория этого вида получила распространение в области расчета строительных конструкций.

Ко второму виду относят теорию пластического течения, которая справедлива не только при простом нагружении, когда она совпадает с деформационной теорией, но и в определенных рамках сложного нагружения, а также при конечных деформациях. Поэтому эта теория находит применение в технологической практике (прокатка, волочение и т. д.), где исследуются большие пластические деформации.

Кроме этого различия существовало несколько противоречивых взглядов на механизм образования пластических деформаций, которые были устранены исследованиями А. А. Ильюшина (см., например, монографию [9]). Он установил, что при простом нагружении и малых деформациях деформационная теория пластичности является частным случаем общей теории пластического течения.

§ 3. Условия пластичности

При решении задач теории пластичности во многих случаях необходимо знать, при каких условиях материал в рассматриваемой точке переходит из упругого состояния в пластическое. Такие условия называются *условиями пластичности*. При линейном напряженном состоянии условие пластичности устанавливается опытным путем. В этом случае отлично от нуля только главное напряжение σ_1 и пластические деформации возникают, когда

$$\sigma_1 = \sigma_T; \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad (a)$$

где σ_T — предел текучести при растяжении (постоянная величина для каждого материала).

При чистом сдвиге условие пластичности, получаемое экспериментальным путем, имеет вид

$$\tau = \tau_T,$$

где τ_T — предел текучести при чистом сдвиге (также постоянная величина для каждого материала).

В общем случае плоского или объемного напряженных состояний экспериментально невозможно установить условия пластичности для бесконечного множества соотношений между составляющими напряжений. Поэтому условие пластичности для сложного напряженного состояния устанавливается гипотетическим путем с последующей экспериментальной проверкой.

Рассмотрим два условия пластичности, наиболее часто используемые в теории пластичности и достаточно правильно определяющие переход материала из упругого состояния в пластическое.

Первое условие — *условие пластичности Треска—Сен-Венана* — гласит, что пластические деформации в материале возникают, когда

максимальные касательные напряжения достигают значения, равного пределу текучести при чистом сдвиге:

$$\tau_{\max} = \tau_T. \quad (11.1)$$

Максимальные касательные напряжения определяются формулой (1.25):

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2. \quad (6)$$

Подставляя сюда главные напряжения при линейном напряженном состоянии (а), в момент появления пластических деформаций получаем

$$\tau_{\max} = \sigma_T/2. \quad (в)$$

Сравнивая формулы (11.1) и (в), заключаем, что

$$\tau_T = \sigma_T/2. \quad (г)$$

После подстановки выражений (б) и (г) в формулу (11.1) приходим к условию пластичности Треска—Сен-Венана в таком виде:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tau_T. \quad (11.2)$$

Второе условие — *условие пластичности Губера—Мизеса—Генки* — гласит, что пластические деформации в материале возникают, когда интенсивность касательных напряжений достигает некоторого постоянного для данного материала значения:

$$\tau_i = C. \quad (д)$$

Определим эту постоянную из результатов испытаний при простом растяжении. Подставляя в формулу (1.22) главные напряжения (а), найдем значение интенсивности касательных напряжений при растяжении в момент появления пластических деформаций:

$$\tau_i = \sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_T^2/3} = \sigma_T \sqrt{2/3}. \quad (е)$$

Сравнивая формулы (е) и (д), заключаем, что постоянная

$$C = \sigma_T \sqrt{2/3}. \quad (ж)$$

Подставляя выражения (1.22) и (ж) в формулу (д), приходим к условию пластичности Губера—Мизеса—Генки в такой форме:

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}/\sqrt{2} = \sigma_T, \quad (11.3)$$

или на основании формулы (1.23)

$$\sigma_i = \sigma_T. \quad (11.4)$$

Оба рассмотренных условия пластичности дают весьма близкие результаты. Эксперименты несколько лучше подтверждают условие Губера—Мизеса—Генки. Кроме того, это условие удобнее с математической точки зрения, так как выражение τ_{\max} через шесть составляющих напряжений очень громоздко, а σ_i выражается через эти составляющие сравнительно просто. Поэтому в теории пластичности чаще используется условие пластичности Губера—Мизеса—Генки.

§ 4. Теория малых упругопластических деформаций

В основе теории малых упругопластических деформаций лежат следующие законы, вытекающие из обобщения экспериментальных материалов.

Первый закон — закон изменения объема. При упруго-пластическом активном и пассивном деформировании объемная деформация твердого тела всегда является упругой и подчиняется закону Гука (3.6):

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (11.5)$$

Чтобы упростить решение многих задач, в теории пластичности используется допущение о несжимаемости материала. В этом случае объемную деформацию (2.6) принимают равной нулю:

$$\theta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (а)$$

Так как среднее напряжение σ_0 при этом не равно нулю и является конечной величиной, то модуль объемного расширения должен быть принят равным бесконечности:

$$K = E/[3(1 - 2\nu)] = \infty.$$

Отсюда следует, что для несжимаемого материала можно принимать коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$. В этом случае соотношение (3.1) между модулем сдвига G и модулем продольной упругости E значительно упрощается:

$$G = E/[2(1 + \nu)] = E/[2(1 + 0,5)] = E/3.$$

Второй закон — закон изменения формы. При активном упругопластическом деформировании в процессе простого нагружения направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают, т. е., согласно равенству (3.13),

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\varepsilon.$$

Заменяя направляющие тензоры девиаторами по формулам (1.26) и (2.18), получаем

$$D_\sigma = (2\tau_i/\gamma_i) D_\varepsilon. \quad (б)$$

Из сравнения выражений (1.22) и (1.23) устанавливаем следующую связь между интенсивностью касательных напряжений и интенсивностью напряжений:

$$\tau_i = \sigma_i \sqrt{2}/3, \quad (в)$$

а из сравнения выражений (2.16) и (2.17) — между интенсивностью деформаций сдвига и интенсивностью деформаций:

$$\gamma_i = \varepsilon_i \sqrt{2}. \quad (г)$$

Внося соотношения (в) и (г) в формулу (б), получаем закон изменения формы в таком виде:

$$D_\sigma = [2\sigma_i/(3\varepsilon_i)] D_\varepsilon. \quad (11.6)$$

Эта связь между девиаторами напряжений и деформаций может быть записана через их компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= [2\sigma_i / (3\epsilon_i)] (\epsilon_x - \epsilon_0); \quad \tau_{xy} = [\sigma_i / (3\epsilon_i)] \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= [2\sigma_i / (3\epsilon_i)] (\epsilon_y - \epsilon_0); \quad \tau_{yz} = [\sigma_i / (3\epsilon_i)] \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= [2\sigma_i / (3\epsilon_i)] (\epsilon_z - \epsilon_0); \quad \tau_{zx} = [\sigma_i / (3\epsilon_i)] \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Шесть формул (11.7) не являются полностью независимыми. Действительно, складывая первые три из них, получаем тождество $0 \equiv 0$. Следовательно, формулы (11.7) представляют собой систему пяти уравнений.

В некоторых случаях удобно пользоваться эквивалентными соотношениями, вытекающими из формул (11.7) после несложных преобразований:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\epsilon_y - \epsilon_z} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{\epsilon_z - \epsilon_x} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = \frac{2\sigma_i}{3\epsilon_i}. \quad (11.8)$$

После введения главных касательных напряжений (1.24) и аналогичных им главных деформаций сдвига

$$\gamma_{12} = \epsilon_1 - \epsilon_2; \quad \gamma_{23} = \epsilon_2 - \epsilon_3; \quad \gamma_{31} = \epsilon_3 - \epsilon_1$$

соотношения (11.8) будут выглядеть так:

$$\frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}} = \frac{\tau_{31}}{\gamma_{31}} = \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i}. \quad (11.9)$$

Принимая условие несжимаемости материала (а), получаем закон изменения формы в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\epsilon_i} \epsilon_x; \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i} \gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\epsilon_i} \epsilon_y; \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i} \gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\epsilon_i} \epsilon_z; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i} \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Третий закон — интенсивность напряжений σ_i при активном деформировании данного материала является вполне определенной функцией интенсивности деформаций ϵ_i независимо от вида напряженного состояния:

$$\sigma_i = \Phi(\epsilon_i). \quad (11.11)$$

Обработка многочисленных экспериментов, проведенных в условиях простого нагружения, показывает, что диаграмма $\sigma_i - \epsilon_i$ при любом напряженном состоянии подобна диаграмме $\sigma - \epsilon$ при растяжении. Следовательно, между интенсивностями напряжений σ_i и деформаций ϵ_i существует зависимость, подобная зависимости между напряжением σ и деформацией ϵ при простом растяжении:

$$\sigma = \Phi(\epsilon). \quad (11.12)$$

Поэтому зависимость (11.11) при исследовании любого напряженного состояния — линейного, плоского или объемного — можно устанавливать из опытов на простое растяжение.

Анализ большого числа экспериментов, а также решение многих частных задач теории пластичности позволили А. А. Ильюшину высказать следующий постулат: *теория малых упругопластических деформаций дает правильные (согласующиеся с опытом) результаты, по крайней мере в том случае, когда процесс нагружения тела является простым.*

Вопрос о том, как в процессе нагружения должны возрасти внешние силы, чтобы при любом неоднородном напряженном состоянии направляющий тензор оставался постоянным, в общем виде не решен. А. А. Ильюшиным дано только частное решение этой задачи, называемой теоремой о простом нагружении. Им доказано: *для того чтобы направляющий тензор напряжений во всех точках тела оставался постоянным в процессе простого нагружения, достаточно, чтобы зависимость (11.11) была степенной функцией вида*

$$\sigma_i = A \epsilon_i^m \quad (11.13)$$

и зависимость $\sigma - \epsilon$ была заменена условием несжимаемости материала. В формуле (11.13) A и m — произвольные постоянные.

§ 5. Теорема о разгрузке

Пусть для некоторого тела, находящегося под действием заданной системы объемных и поверхностных сил, задача пластичности решена, т. е. во всех точках тела найдены напряжения, деформации и перемещения. Важной особенностью деформирования тела за пределом упругости является характер разгрузки. Под ней понимают процесс изменения внешних сил, при котором во всех областях тела, где произошло пластическое деформирование, интенсивность напряжений σ_i начинает убывать одновременно. Это значит, что тело из стадии активного деформирования переходит в стадию пассивного деформирования.

А. А. Ильюшиным сформулирована и доказана следующая теорема о разгрузке: *перемещения точки тела в некоторый момент стадии разгрузки отличаются от перемещений в момент начала разгрузки на величины упругих перемещений, которые возникли бы в теле, если бы в естественном состоянии к нему были приложены внешние силы, равные разности внешних сил, действующих на тело в указанные моменты.* То же относится к деформациям и напряжениям.

Отсюда, как следствие, формулируется теорема об остающихся в теле напряжениях, деформациях и перемещениях при полном снятии всех внешних сил: *если для тела решена задача пластичности и заданным значениям внешних сил соответствует истинное состояние равновесия и если, кроме того, для тела решена задача теории упругости, т. е. тем же внешним силам соответствует фиктивное состояние упругого равновесия, то в результате полной разгрузки в теле остаются напряжения, деформации и перемещения, равные разностям их зна-*

чений в истинном и фиктивном состояниях. При этом предполагается, что остаточные напряжения в результате разгрузки не выходят вторично за предел упругости.

Рассмотренная теорема устанавливает следующий порядок определения напряжений, деформаций и перемещений при разгрузке.

1. По уравнениям теории пластичности определяют напряжения, деформации и перемещения, которые возникают при наибольшей нагрузке, действующей до начала разгрузки.

2. По уравнениям теории упругости определяют напряжения, деформации и перемещения, которые вызывает нагрузка, равная разности между наибольшей нагрузкой, имевшей место до разгрузки, и нагрузкой, оставшейся после разгрузки.

3. Из напряжений, деформаций и перемещений, найденных при наибольшей нагрузке, вычитают напряжения, деформации и перемещения, соответствующие значению нагрузки, на которое произошла разгрузка. Это и будут напряжения, деформации и перемещения в рассматриваемый момент разгрузки.

§ 6. Варианты зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций

Вид функциональной зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (11.11) определяется характером диаграммы испытания материала чаще всего при простом растяжении. Рассмотрим диаграмму (см. рис. 100, состоящую из двух участков: прямолинейного Oa и криволинейного ab (упругопластический материал со степенным законом упрочнения). Напряжение в произвольной точке c криволинейного участка диаграммы изображается отрезком cd . Из чертежа следует, что напряжение в произвольной точке

$$\sigma = cd = kd - kc.$$

Как известно, тангенс угла наклона к оси абсцисс прямолинейного участка диаграммы $\sigma - \epsilon$ равен модулю упругости E . Согласно чертежу, $kd = E\epsilon$ и тогда

$$\sigma = E\epsilon - kc.$$

Вынося за скобки упругую часть деформации, получаем

$$\sigma = E\epsilon [1 - kc/(E\epsilon)]. \quad (a)$$

Введем обозначение

$$\omega(\epsilon) = kc/(E\epsilon), \quad (б)$$

где $\omega(\epsilon)$ — функция понижения напряжений, зависящая от деформации ϵ . Внося эту функцию в формулу (a), получаем зависимость (11.12) в такой форме:

$$\sigma = E\epsilon [1 - \omega(\epsilon)].$$

На основании третьего закона теории малых упругопластических деформаций зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций должна иметь такой же вид:

$$\sigma_i = E \varepsilon_i (1 - \omega(\varepsilon_i)). \quad (11.14)$$

Вид функции понижения $\omega(\varepsilon_i)$ зависит от характера диаграммы. Если последняя состоит из двух прямолинейных участков Oa и ab (упругопластический материал с линейным упрочнением, см. рис. 101), то $\omega(\varepsilon_i)$ выражается за пределом текучести подобно функции (б):

$$\omega(\varepsilon_i) = kc / (E \varepsilon_i). \quad (в)$$

Входящий сюда отрезок kc составляет

$$\begin{aligned} kc &= kd - md - ct = E \varepsilon_i - \\ &- E \varepsilon_T - E' (\varepsilon_i - \varepsilon_T) = \\ &= (E - E') (\varepsilon_i - \varepsilon_T), \end{aligned}$$

где $E' = \text{tg } \beta$.

Подставляя полученное значение длины отрезка kc в формулу (в), находим

$$\omega(\varepsilon_i) = [(E - E')/E] [(\varepsilon_i - \varepsilon_T) / \varepsilon_i] = \lambda (1 - \varepsilon_T / \varepsilon_i),$$

где $\lambda = (E - E')/E$ — относительное понижение модуля продольной упругости при переходе в пластическую область деформирования.

Окончательно функция понижения $\omega(\varepsilon_i)$, отвечающая диаграмме на рис. 101, принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0 && \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T; \\ \omega &= \lambda (1 - \varepsilon_T / \varepsilon_i) && \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T. \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

Для материала, диаграмма которого не имеет прямолинейных участков, подобно диаграмме Oab , изображенной на рис. 102, зависимость (11.11) можно представить в виде степенного закона

$$\sigma_i = \sigma_T (\varepsilon_i / \varepsilon_T)^m, \quad (11.16)$$

где показатель степени $0 \leq m \leq 1$.

Если $m = 1$, получаем закон деформирования идеально упругого материала

$$\sigma_i = (\sigma_T / \varepsilon_T) \varepsilon_i = E \varepsilon_i,$$

чему на рисунке соответствует наклонная прямая штриховая линия Oac .

При $m = 0$ получаем закон деформирования идеально пластического материала, не обладающего упрочнением:

$$\sigma_i = \sigma_T.$$

На рисунке ему соответствует горизонтальная прямая штриховая линия kad .

Для идеального упругопластического материала, следующего диаграмме Прандтля (рис. 103), зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций принимает такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= E\varepsilon_i & \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_T; \\ \sigma_i &= \sigma_T & \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_T. \end{aligned} \right\} \quad (11.17)$$

При больших пластических деформациях (в 20 раз и более превышающих упругие) величиной упругой деформации можно пренебречь

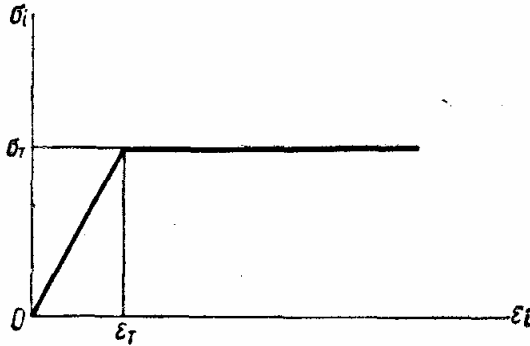


Рис. 103

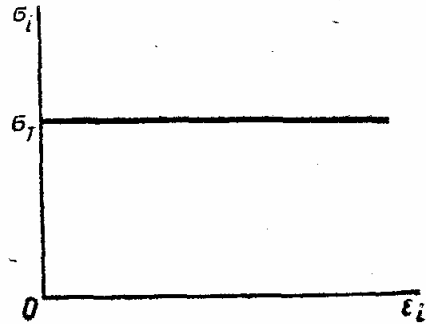


Рис. 104

и справедлива диаграмма, приведенная на рис. 104. Ее называют диаграммой деформирования идеального жесткопластического материала. Она подчиняется зависимости

$$\sigma_i = \sigma_T. \quad (11.18)$$

§ 7. Понятие о теории пластического течения

Рассмотрим основные положения теории пластического течения. По смыслу названия она рассматривает пластическую деформацию твердого тела как состояние движения. Уравнения теории пластического течения могут быть написаны аналогично уравнениям теории малых упругопластических деформаций. Теория включает в себя три гипотезы.

1. Материал в пластическом состоянии несжимаем, т. е. $\varepsilon_0 = 0$.

2. Компоненты девиатора приращений пластических деформаций прямо пропорциональны компонентам девиатора напряжений. Эта гипотеза приводит к системе уравнений, аналогичной системе (11.10) в теории малых упругопластических деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3d\varepsilon_i} d\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

3. Интенсивность напряжений является определенной функцией интеграла интенсивности приращений пластических деформаций, не зависящей от вида напряженного состояния, т. е.

$$\sigma_i = \Phi \left(\int d\epsilon_i \right). \quad (11.20)$$

В случае идеальной пластичности интенсивность напряжений постоянна.

Как уже было указано, теория пластического течения находит основное применение в технологической практике. Однако в последнее время появились работы, в которых эта теория применяется к расчету строительных конструкций, работающих в условиях сложного нагружения или испытывающих большие деформации.

§ 8. Постановка задачи теории пластичности

Задача теории пластичности ставится аналогично задаче теории упругости. Известны действующие на тело поверхностные X_v, Y_v, Z_v (включая реакции) и объемные X, Y, Z силы, а также упругопластические свойства тела, определяющие диаграмму $\sigma_i - \epsilon_i$. Требуется найти возникающие при этом напряжения, деформации и перемещения. Таким образом, имеется 17 неизвестных функций трех координат x, y и z : шесть составляющих напряжений — $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz},$ и τ_{zx} ; шесть составляющих деформации — $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ и γ_{zx} ; три составляющие перемещения — u, v и w ; интенсивность напряжений σ_i и интенсивность деформаций ϵ_i .

Для отыскания этих функций теория пластичности располагает следующей совокупностью уравнений:

три дифференциальных уравнения равновесия (4.1);

шесть физических уравнений (11.7), устанавливающих связь между напряжениями и деформациями, причем только пять из этих уравнений являются независимыми; в качестве шестого физического уравнения следует воспользоваться законом изменения объема (11.5);

шесть геометрических соотношений Коши (4.3);

зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (11.11);

выражение интенсивности деформаций (2.17).

Итого 17 уравнений с 17 неизвестными. Кроме того, необходимо также удовлетворить условиям на поверхности (4.2). Таким образом, математически задача при активной деформации и простом нагружении имеет решение. Однако практически получить его трудно, так как уравнения записываются в частных производных, и притом нелинейны.

Для материала со слабовыраженным упрочнением, действительную диаграмму деформирования которого можно заменить диаграммой идеально упругопластического или жесткопластического материала, согласно рис. 103 и 104, вместо шести физических уравнений используют одно из условий пластичности, например (11.4). Такая замена шести уравнений одним не позволяет однозначно определять де-

формации тела, полностью находящегося в пластическом состоянии. Однозначное решение при использовании условия (11.4) получится только в том случае, если тело находится в упругопластическом состоянии, т. е. наряду с пластическими в нем существуют и упругие зоны.

При решении задачи теории пластичности можно использовать те же способы, что и в теории упругости: решение в напряжениях, в перемещениях и смешанный способ. Точно так же возможно применение методов теории упругости, а именно: прямого, обратного и полуобратного. Однако решение задачи теории пластичности имеет свои специфические особенности вследствие нелинейности. Эффективным является приближенный метод, предложенный А. А. Ильюшиным, — *метод упругих решений* (разновидность метода последовательных приближений).

Рассмотрим кратко этот метод. Выражения напряжений через пластические деформации могут быть получены из аналогичных зависимостей теории упругости заменой постоянных упругих характеристик переменными. Так, согласно зависимости (11.14), через модуль продольной упругости можно выразить величину $E' = E(1 - \omega)$, а через модуль сдвига — величину $G' = G(1 - \omega)$.

Из указанной зависимости можно получить соотношение

$$\sigma_i/\varepsilon_i = E(1 - \omega),$$

а используя связь модуля сдвига и модуля продольной упругости в пластической стадии деформирования $E = 3G$, получаем

$$\sigma_i/\varepsilon_i = 3G(1 - \omega). \quad (11.21)$$

Подставляя последнее соотношение в первую из формул (11.7), получаем

$$\sigma_x - \sigma_0 = 2G(1 - \omega)(\varepsilon_x - \varepsilon_0),$$

откуда

$$\sigma_x = \sigma_0 + 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0) - 2G\omega(\varepsilon_x - \varepsilon_0).$$

Обозначим:

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_0 + 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0).$$

Выполняя аналогичные преобразования в остальных пяти уравнениях (11.7), получим следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \bar{\sigma}_x - 2G\omega(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} - G\omega\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \bar{\sigma}_y - 2G\omega(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= \bar{\tau}_{yz} - G\omega\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \bar{\sigma}_z - 2G\omega(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= \bar{\tau}_{zx} - G\omega\gamma_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

где $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yz}, \bar{\tau}_{zx}$ — фиктивные упругие напряжения, которые возникли бы в случае идеально упругого тела, т. е. при $\omega = 0$.

Внося зависимости (11.22) в уравнения равновесия (4.1), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z} + (X - GR_x) &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial z} + (Y - GR_y) &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} + (Z - GR_z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= 2 \frac{\partial}{\partial x} [\omega (\epsilon_x - \epsilon_0)] + \frac{\partial}{\partial y} (\omega \gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\omega \gamma_{xz}); \\ R_y &= \frac{\partial}{\partial x} (\omega \gamma_{yx}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} [\omega (\epsilon_y - \epsilon_0)] + \frac{\partial}{\partial z} (\omega \gamma_{yz}); \\ R_z &= \frac{\partial}{\partial x} (\omega \gamma_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\omega \gamma_{zy}) + 2 \frac{\partial}{\partial z} [\omega (\epsilon_z - \epsilon_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (11.24)$$

Проведя аналогичную подстановку зависимостей (11.22) в условия на поверхности (4.2), получим

$$\left. \begin{aligned} X_v + GR_{xv} &= \bar{\sigma}_x l + \bar{\tau}_{xy} m + \bar{\tau}_{xz} n; \\ Y_v + GR_{yv} &= \bar{\tau}_{yx} l + \bar{\sigma}_y m + \bar{\tau}_{yz} n; \\ Z_v + GR_{zv} &= \bar{\tau}_{zx} l + \bar{\tau}_{zy} m + \bar{\sigma}_z n, \end{aligned} \right\} \quad (11.25)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} R_{xv} &= \omega [2 (\epsilon_x - \epsilon_0) l + \gamma_{xy} m + \gamma_{xz} n]; \\ R_{yv} &= \omega [\gamma_{yx} l + 2 (\epsilon_y - \epsilon_0) m + \gamma_{yz} n]; \\ R_{zv} &= \omega [\gamma_{zx} l + \gamma_{zy} m + 2 (\epsilon_z - \epsilon_0) n]. \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

Рассмотрим теперь ход решения задачи теории пластичности методом упругих решений. В первом приближении полагаем $\omega^{(1)} = 0$. Тогда из формул (11.24) и (11.26) следует, что в первом приближении

$$R_x^{(1)} = R_y^{(1)} = R_z^{(1)} = R_{xv}^{(1)} = R_{yv}^{(1)} = R_{zv}^{(1)} = 0$$

и уравнения (11.23), (11.25) обращаются в уравнения (4.1), (4.2), т. е. приходим к задаче теории упругости о действии на тело объемных X, Y, Z и поверхностных X_v, Y_v, Z_v сил. Если такая задача решена, то найдены в первом приближении составляющие напряжений $\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \sigma_z^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}, \tau_{yz}^{(1)}, \tau_{zx}^{(1)}$, составляющие деформаций $\epsilon_x^{(1)}, \epsilon_y^{(1)}, \epsilon_z^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)}, \gamma_{yz}^{(1)}, \gamma_{zx}^{(1)}$, а также интенсивность напряжений $\sigma_i^{(1)}$ и интенсивность деформаций $\epsilon_i^{(1)}$.

После этого согласно соотношению (11.21) подсчитываем функцию ω во втором приближении:

$$\omega^{(2)} = 1 - \sigma^{(1)} / (3G\epsilon^{(1)})$$

Затем по формулам (11.24) подсчитываем во втором приближении $R_x^{(2)}$, $R_y^{(2)}$, $R_z^{(2)}$, а по формулам (11.26) — $R_{xv}^{(2)}$, $R_{yv}^{(2)}$, $R_{zv}^{(2)}$. Согласно уравнениям (11.23), объемные силы во втором приближении можно рассматривать равными

$$\left. \begin{aligned} X^{(2)} &= X - GR_x^{(2)}; \\ Y^{(2)} &= Y - GR_y^{(2)}; \\ Z^{(2)} &= Z - GR_z^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (11.27)$$

а поверхностные силы, согласно условиям (11.25), равны

$$\left. \begin{aligned} X_v^{(2)} &= X_v + GR_{xv}^{(2)}; \\ Y_v^{(2)} &= Y_v + GR_{yv}^{(2)}; \\ Z_v^{(2)} &= Z_v + GR_{zv}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (11.28)$$

Теперь можно решить задачу теории упругости о действии на тело объемных (11.27) и поверхностных (11.28) сил, т. е. получить во втором приближении составляющие напряжений $\sigma_x^{(2)}$, $\sigma_y^{(2)}$, $\sigma_z^{(2)}$, $\tau_{xy}^{(2)}$, $\tau_{yz}^{(2)}$, $\tau_{zx}^{(2)}$, деформаций $\epsilon_x^{(2)}$, $\epsilon_y^{(2)}$, $\epsilon_z^{(2)}$, $\gamma_{xy}^{(2)}$, $\gamma_{yz}^{(2)}$, $\gamma_{zx}^{(2)}$, интенсивность напряжений $\sigma_i^{(2)}$ и интенсивность деформаций $\epsilon_i^{(2)}$.

Затем находим все величины в третьем приближении и т. д., пока разница между последовательными приближениями не окажется в пределах допустимой точности.

Аналогично рассмотренному методу упругих решений в теории малых упругопластических деформаций существует приближенный метод решения задач теории пластического течения — метод вязких решений, разработанный А. А. Ильюшиным и П. М. Огибаловым.

ГЛАВА XII ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

§ 1. Упругопластический изгиб призматического бруса

Чистый изгиб. Рассмотрим задачу о чистом упругопластическом изгибе балки постоянного сечения с двумя осями симметрии (рис. 105), нагруженную по торцам парами сил с моментом M_0 (см. рис. 12). Решать будем обратным методом в напряжениях.

В упругой стадии деформирования балки при чистом изгибе отлична от нуля только одна составляющая напряжений σ_z (см. § 1 гл. V). Примем то же и в пластической стадии. В этом случае условие пластичности (11.4) примет такой вид

$$|\sigma_z| = \sigma_T. \quad (a)$$

Предположим, что материал балки подчиняется закону деформирования, изображенному на рис. 102 и описываемому уравнением (11.16), которое в случае чистого изгиба принимает вид

$$\sigma_z = \sigma_T (\epsilon_z / \epsilon_T)^m, \quad (б)$$

где по-прежнему $0 \leq m \leq 1$.

Предположим также, что материал одинаково сопротивляется как растяжению, так и сжатию. Вследствие этого распределение напряжений σ_z по высоте сечения будет следовать диаграмме рис. 102. На рис. 105 показаны эпюры продольных деформаций ϵ_z (получаемая на основании гипотезы плоских сечений) и эпюра нормальных напряжений σ_z . Координата ξ определяет границу упругих и пластических деформаций. Пластические зоны на рисунке заштрихованы.

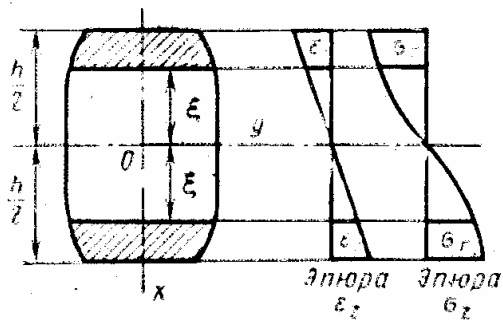


Рис. 105

Из эпюры ϵ_z устанавливаем следующее соотношение для деформаций:

$$\epsilon_z / \epsilon_T = x / \xi. \quad (в)$$

Подставляя его в уравнение (б), получаем функцию напряжений в таком виде:

$$\sigma_z = \sigma_T (x / \xi)^m. \quad (г)$$

При возрастании момента M_0 нагружение в каждой точке является простым и для решения задачи можно применить теорию малых упругопластических деформаций.

Если пренебречь объемными силами, то дифференциальные уравнения равновесия (4.1) при подстановке в них напряжений (г) обращаются в тождества. Граничные условия на боковой поверхности сводятся к тому, что поверхностные нагрузки $X_v = Y_v = Z_v = 0$ и направляющий косинус $n = 0$. Учитывая это и подставляя функцию (г) в условия на поверхности (4.2), также получаем тождества.

На торцах балки по условию задачи приложены пары сил с моментом M_0 . Так как функция (г) не зависит от координаты z , то на торцах возникнут такие же напряжения, как и в любом другом поперечном сечении балки. Эти напряжения сводятся к моменту относительно оси y , который должен уравновесить внешний момент M_0 :

$$M_0 = \int_F \sigma_z x dF, \quad (д)$$

или после подстановки сюда функции (г)

$$M_0 = \frac{\sigma_T}{\xi^m} \int_F x^{m+1} dF. \quad (е)$$

Рассмотрим интегрирование этого выражения в случае прямоугольного сечения размером $b \times h$ (рис. 106, а). Разбивая сечение на элементарные полосы площадью $dF = b dx$, с учетом симметрии относительно оси y получаем

$$M_0 = \frac{\sigma_T}{\xi^m} \cdot 2 \int_0^{h/2} x^{m+1} b dx = \frac{2\sigma_T b (h/2)^{m+2}}{(m+2) \xi^m}. \quad (ж)$$

Выразив отсюда ξ^m и подставив в формулу (г), находим напряжения:

$$\sigma_z = \frac{M_0 (m+2)}{2b(h/2)^{m+2}} x^m. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь два предельных случая деформирования балки.

1. *Предел упругого деформирования.* Пусть $M_{\text{упр}}$ — изгибающий момент, при котором напряжения σ_z достигают предела текучести

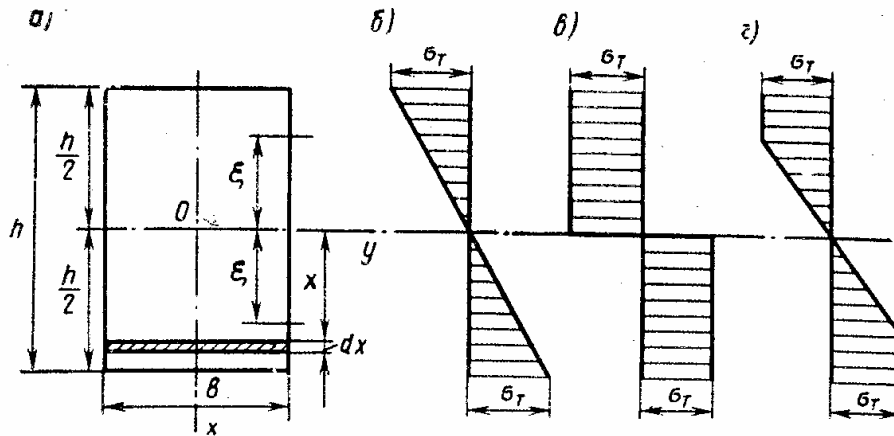


Рис. 106

только в крайних волокнах сечения (рис. 106, б). Для его определения в формулах (г) и (ж) следует полагать $m = 1$ (идеальная упругость) и $\xi = h/2$. Тогда

$$M_{\text{упр}} = \sigma_T b h^2 / 6, \quad (12.1)$$

где $b h^2 / 6 = W_{\text{упр}}$ — момент сопротивления сечения балки относительно оси y .

2. *Предел пластического деформирования.* Обозначим через M_T изгибающий момент, при котором текучесть материала наступает во всем сечении балки (рис. 106, в). Для его определения в формулах (г) и (ж) необходимо принять $m = 0$ (идеальная пластичность). Тогда

$$M_T = \sigma_T b h^2 / 4. \quad (12.2)$$

Здесь $b h^2 / 4 = W_{\text{пл}}$ — пластический момент сопротивления.

В случае упругопластического деформирования балки, когда $M_{\text{упр}} < M_0 < M_T$, решение достигается формулами (ж) и (з). Так, из формулы (ж) определяется высота упругого ядра. С учетом формулы (12.2)

$$(2\xi/h)^m = \frac{2}{m+2} \frac{M_T}{M_0}. \quad (12.3)$$

Из формулы (з) находятся напряжения:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_T} = \frac{m+2}{2} \frac{M_0}{M_T} (2x/h)^m. \quad (12.4)$$

В случае идеально упругопластического материала, следующего диаграмме на рис. 103, эпюра напряжений σ_z будет иметь вид ломаной (рис. 106, з). Эта эпюра может быть описана следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_T \frac{x}{\zeta} \quad \text{при } 0 \leq |x| \leq \zeta; \\ |\sigma_z| &= \sigma_T \quad \text{при } |x| \geq \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{и})$$

Интегрируя выражение (д) с учетом зависимостей (и), аналогично предыдущему, найдем

$$\frac{\zeta}{h} = \sqrt{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{M_0}{M_T}\right)}. \quad (12.5)$$

Поперечный изгиб. В этом случае кроме нормальных напряжений σ_z в балке возникают касательные напряжения τ_{xz} . Соотношение между нормальными и касательными напряжениями зависит от отношения высоты балки к ее длине. В длинных балках касательные напряжения малы по сравнению с нормальными, поэтому в рассматриваемой задаче будем ими пренебрегать, считая балку достаточно длинной. Тогда решение (12.5), полученное для чистого изгиба балки из идеально упругопластического материала, пригодно и для поперечного изгиба с той лишь разницей, что изгибающий момент будет переменной величиной, зависящей от координаты z . Переменной вдоль оси балки окажется и высота упругого ядра ζ :

$$\frac{\zeta}{h} = \sqrt{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{M}{M_T}\right)}. \quad (\text{к})$$

Рассмотрим эту зависимость применительно к балке на двух опорах, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 107, а). Изгибающий момент в поперечном сечении такой балки

$$\begin{aligned} M &= (ql/2)(l/2 - z) - \\ &- (q/2)(l/2 - z)^2 = (q/2)(l^2/4 - z^2). \end{aligned} \quad (\text{л})$$

Предельный пластический момент возникает в сечении посередине балки (при $z = 0$) и составляет

$$M_T = q_T l^2 / 8. \quad (\text{м})$$

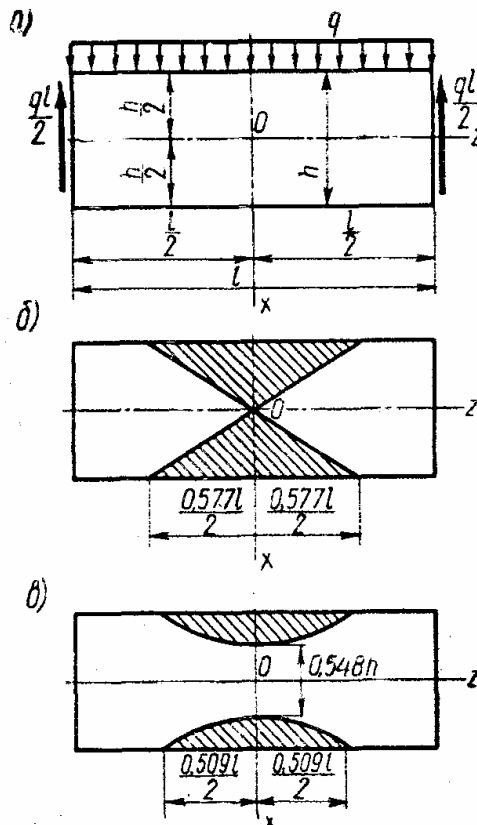


Рис. 107

Подставляя значения моментов из формул (л) и (м) в уравнение (к), получаем

$$\frac{\xi}{h} = \sqrt{\frac{3}{4} \left[1 - \frac{q}{q_T} \left(1 - \frac{4z^2}{l^2} \right) \right]}. \quad (12.6)$$

Из записанного выражения следует, что высота упругого ядра зависит от координаты z и от отношения интенсивности распределенной нагрузки q к ее предельному значению q_T . При $q = q_T$

$$\xi/h = z \sqrt{3}/l.$$

На рис. 107, б показаны соответствующие этому результату границы между упругими и пластическими зонами (последние заштрихованы). В отличие от чистого изгиба здесь предельное состояние достигается только в одном сечении посередине балки, где образуется так называемый *пластический шарнир*.

При $q = 0,9q_T$ из формулы (12.6) получаем

$$\xi/h = \sqrt{0,075 + 2,7z^2/l^2}.$$

Образующиеся в этом случае пластические зоны показаны на рис. 107, в.

При $q \leq (2/3) q_T$ пластические зоны не возникают вообще и балка испытывает только упругие деформации.

§ 2. Упругопластическое кручение бруса круглого сечения

Решение этой задачи можно получить, предполагая, что поперечные сечения остаются плоскими и за пределом упругости материала. Тогда, согласно формуле (5.8), в поперечном сечении бруса возникают только касательные напряжения

$$\tau = M_0 \rho / J_p, \quad (a)$$

направленные в каждой точке сечения перпендикулярно радиусу и пропорциональные расстоянию ρ от центра сечения. Эти напряжения дают следующие составляющие вдоль осей x и y (см. рис. 16):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -M_0 y / J_p; \\ \tau_{yz} &= M_0 x / J_p. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Остальные составляющие напряжений равны нулю.

Рассмотрим материал, не обладающий упрочнением. В пластической зоне, согласно условию пластичности (11.3),

$$\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \sigma_T / \sqrt{3}. \quad (в)$$

Величина, стоящая в левой части, $\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \tau$, а величина, стоящая в правой части, называется пределом текучести при сдвиге: $\tau_T = \sigma_T / \sqrt{3}$. Тогда условие пластичности (в) принимает вид

$$\tau = \tau_T. \quad (г)$$

Примем распределение напряжений в упругой зоне по формуле (а), а в пластической — по формуле (г). Следовательно, эпюра напряжений будет иметь вид, показанный на рис. 108. Она подчиняется следующим зависимостям:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= (\rho/\rho_T) \tau_T \text{ при } \rho \leq \rho_T; \\ \tau &= \tau_T \text{ при } \rho \geq \rho_T, \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

где ρ_T — радиус упругого ядра.

Напряжения (д) удовлетворяют уравнениям равновесия (4.1) и уравнениям неразрывности деформаций (4.12). Условия неразрывности

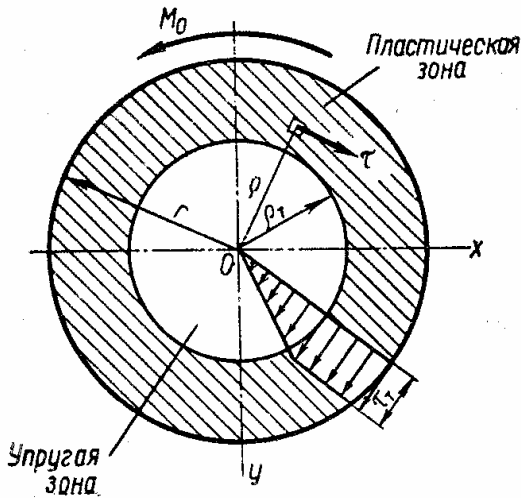


Рис. 108

на границе между упругой и пластической зонами (при $\rho = \rho_T$) также выполняются. На боковой поверхности касательные напряжения (д) на основании закона парности касательных напряжений составляющей не дают, что соответствует отсутствию на ней поверхностных нагрузок. Следовательно, граничные условия на боковой поверхности бруса выполняются.

Рассмотрим граничные условия на торцах. Здесь касательные напряжения τ должны уравновесить внешний момент M_0 , т. е.

$$M_0 = \int_F \tau \rho dF. \quad (е)$$

Разобьем площадь интегрирования F на упругую $F_{упр}$ и пластическую $F_{пл}$ зоны. Подставив в формулу (е) значения напряжений (д), соответствующие этим зонам, получим

$$M_0 = \frac{\tau_T}{\rho_T} \int_{F_{упр}} \rho^2 dF + \tau_T \int_{F_{пл}} \rho dF. \quad (ж)$$

Введем обозначения входящих сюда интегралов:

$$\left. \begin{aligned} J_p^{упр} &= \int_{F_{упр}} \rho^2 dF; \\ S_p^{пл} &= \int_{F_{пл}} \rho dF. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Здесь $J_p^{упр}$ — полярный момент инерции площади упругого ядра; $S_p^{пл}$ — статический момент площади пластической зоны.

С учетом этих обозначений формула (ж) запишется в виде

$$M_0 = \tau_T (J_p^{упр}/\rho_T + S_p^{пл}). \quad (12.8)$$

За элементарную площадь dF принимаем площадь кольца радиусом ρ и бесконечно малой толщиной $d\rho$:

$$dF = 2\pi\rho d\rho.$$

Подставляем это выражение в формулы (12.7) и интегрируем:

$$J_p^{упр} = 2\pi \int_0^{\rho_T} \rho^3 d\rho = \frac{\pi\rho_T^4}{2};$$

$$S_p^{упр} = 2\pi \int_{\rho_T}^r \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi (r^3 - \rho_T^3).$$

Внося полученные значения в формулу (12.8), после упрощения находим

$$M_0 = \tau_T \cdot 2/3\pi r^3 [1 - 1/4 (\rho_T/r)^3]. \quad (3)$$

Считая, что предельное состояние скручиваемого бруса наступает, когда пластическая зона охватывает все сечение, т. е. при $\rho_T = 0$ (рис. 109), из формулы (3) получаем предельное значение скручивающего момента:

$$M_0^T = \tau_T \cdot 2/3\pi r^3. \quad (и)$$

Деля почленно соотношение (3) на (и), находим соотношения между скручивающим моментом и радиусом упругого ядра:

$$\frac{M_0}{M_0^T} = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_T}{r} \right)^3. \quad (12.9)$$

Принятая на рис. 109 эпюра связана, казалось бы, с нарушением непрерывности напряжений в центре тяжести сечения. Однако в действительности вокруг центра тяжести всегда остается небольшая упругая зона. При этом понятие предельного пластического момента смысла не теряет, так как даже при радиусе упругого ядра, равном половине радиуса сечения ($\rho_T = r/2$), согласно формуле (12.9), $M_0 = 0,969M_0^T$, т. е. разница составляет приблизительно 3%.

При $M_0 \leq 0,75M_0^T$ все сечение будет находиться в упругом состоянии.

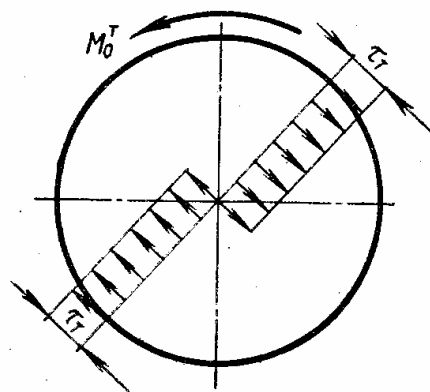


Рис. 109

§ 3. Упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления

Точное решение этой задачи представляет большие трудности и осуществляется численными методами. Рассмотрим на примере длинной трубы приближенное решение, достаточно хорошо согласующееся

с точным. Труба находится в условиях плоской деформации, следовательно, в цилиндрической системе координат r, θ, z касательные напряжения

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0 \quad (a)$$

(ось z направлена вдоль оси трубы).

В упругой стадии работы материала нормальные радиальные и тангенциальные напряжения определяются формулами (7.37). Эпюры этих напряжений показаны на рис. 43, а. Осевые нормальные напряжения

σ_z при плоской деформации определяются по формуле (6.1). В цилиндрической системе координат

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (б)$$

Для упрощения задачи материал трубы считаем несжимаемым, т. е. коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$. Тогда формула (б) принимает такой вид:

$$\sigma_z = 0,5 (\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (в)$$

В силу осевой симметрии касательные напряжения

$$\tau_{r\theta} = 0. \quad (г)$$

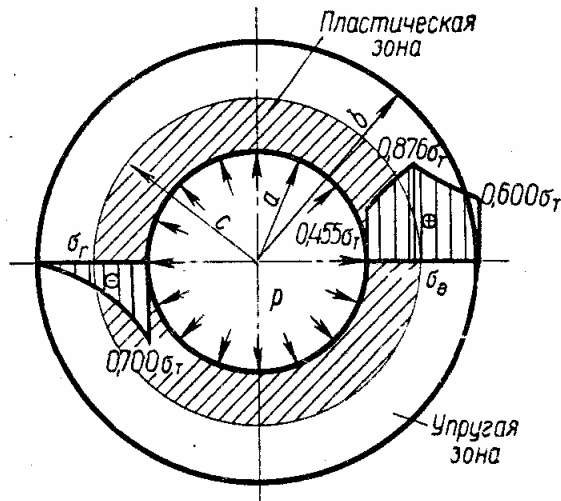


Рис. 110

В упругопластической стадии сечение трубы можно считать состоящим из двух кольцевых зон: внутренней пластической, где $a \leq r \leq c$, и наружной упругой, где $c \leq r \leq b$ (рис. 110).

Для упругой зоны справедливы, как указывалось, формулы (7.37), которые с учетом ее размеров принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{qc^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{qc^2}{b^2 - c^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

где q — радиальное давление на границе между упругой и пластической зонами (при $r = c$).

Для определения напряжений в пластической зоне рассмотрим уравнения равновесия плоской задачи в полярной системе координат (7.1). При отсутствии объемных сил

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

Вследствие осевой симметрии напряжения не зависят от полярного угла и производные по θ в уравнениях (д) обращаются в нуль. Тогда с учетом равенства (г) получаем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (е)$$

Считаем, что материал трубы не обладает упрочнением, и принимаем условие пластичности (11.4). Интенсивность напряжений (1.23) в цилиндрической системе координат выглядит следующим образом:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{zr}^2)}. \quad (ж)$$

Подставляя сюда значения напряжений (а), (в) и (г), находим

$$\sigma_i = \pm (\sqrt{3}/2) (\sigma_r - \sigma_\theta). \quad (з)$$

В рассматриваемой задаче напряжение σ_θ всегда больше напряжения σ_r , поэтому в условие пластичности подставляем положительное значение интенсивности напряжений (з):

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\sigma_r / \sqrt{3}. \quad (и)$$

Решаем совместно уравнения (е) и (и). Подставляя разность напряжений из уравнения (и) в уравнение (е), получаем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_r}{r}.$$

Это уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, находим

$$\sigma_r = (2/\sqrt{3}) \sigma_r \ln r + C. \quad (к)$$

Используя граничное условие на внутренней поверхности трубы, где при $r = a$ $\sigma_r = -p$, получаем уравнение

$$-p = (2/\sqrt{3}) \sigma_r \ln a + C.$$

откуда постоянная

$$C = (-2/\sqrt{3}) \sigma_r \ln a - p.$$

Внося этот результат в выражение (к), находим

$$\sigma_r = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_r \ln \frac{r}{a}.$$

Тогда из уравнения (и) легко подсчитать и напряжение σ_θ .

Таким образом, напряженное состояние в пластической зоне трубы характеризуется следующими напряжениями:

$$\sigma_r = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_r \ln \frac{r}{a}; \quad \sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_r. \quad (12.11)$$

На границе между упругой и пластической зонами напряжения σ_r и σ_θ должны быть непрерывными. Приравнивая правые части

соответствующих выражений (12.10) и (12.11), при $r = c$ получаем два уравнения для определения q и c :

$$\begin{aligned} -\frac{qc^2}{b^2-c^2} \left(\frac{b^2}{c^2} - 1 \right) &= -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{c}{a}; \\ \frac{qc^2}{b^2-c^2} \left(\frac{b^2}{c^2} + 1 \right) &= -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{c}{a} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T. \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим

$$q = p - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{c}{a} \quad (12.12)$$

и подставляем во второе, которое преобразуется в следующее:

$$\ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) = \frac{p \sqrt{3}}{2\sigma_T}. \quad (12.13)$$

Уравнение (12.13) служит для определения радиуса c окружности, разграничивающей упругую и пластическую зоны трубы как функции внутреннего давления p . После определения c находим по формуле (12.12) радиальное давление q .

Теперь можно в общем виде получить решения для двух предельных случаев деформирования трубы.

1. *Предел упругого деформирования.* Это состояние соответствует значению радиуса $c = a$. Тогда из уравнения (12.13) находим давление:

$$p_{\text{упр}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right). \quad (12.14)$$

Внося это значение в формулы (7.37), получаем соответствующие напряжения:

$$\sigma_r = -\frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right). \quad (12.15)$$

Эпюры напряжений для трубы с отношением наружного и внутреннего радиусов $b/a = 2$ показаны на рис. 111. В этом случае $p_{\text{упр}} = 0,433\sigma_T$.

2. *Предел пластического деформирования.* В этом случае $c = b$ и

$$p_T = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{b}{a}. \quad (12.16)$$

После подстановки полученного значения давления в формулы (12.11) находим напряжения:

$$\sigma_r^I = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{b}{r}; \quad \sigma_\theta^I = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \left(1 - \ln \frac{b}{r} \right). \quad (12.17)$$

Эпюры напряжений при том же отношении наружного и внутреннего радиусов показаны на рис. 112. В этом случае предельное давление $p_T = 0,800\sigma_T$.

Если $p_{\text{упр}} < p < p_T$, то труба будет находиться в упругопластическом состоянии. На рис. 110 изображены эпюры напряжений σ_r и σ_θ , соответствующие давлению $p = 0,700\sigma_T$. В этом случае радиус границы между упругой и пластической зонами, определенный из уравнения (12.13), $c = 1,44a$.

Радиальное давление (12.12) составляет $q = 0,279\sigma_T$.

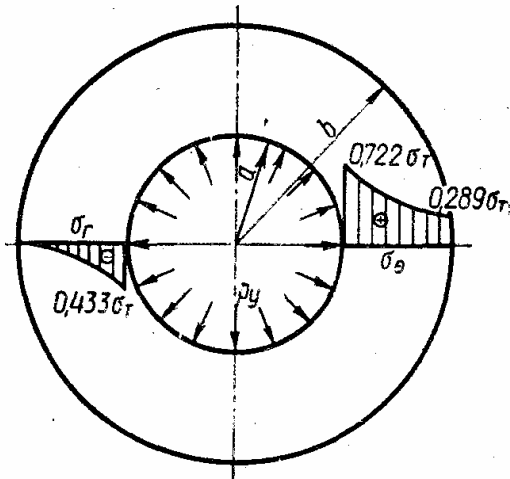


Рис. 111

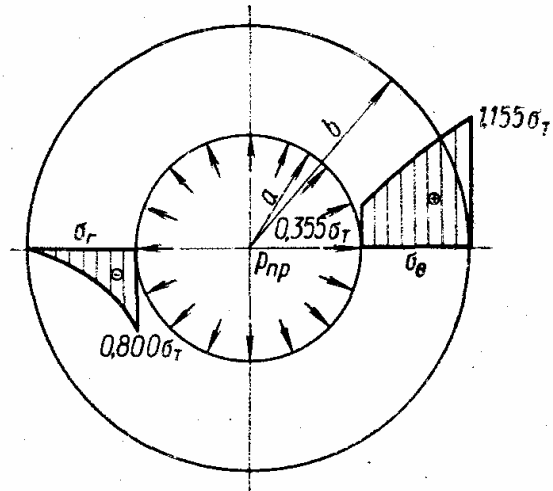


Рис. 112

Подставляя значение давления в формулы (12.11), получаем выражения напряжений в пластической зоне трубы (в пределах $a \leq r \leq 1,44a$):

$$\sigma_r = \sigma_T \left(1,155 \ln \frac{r}{a} - 0,700 \right); \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 1,155\sigma_T. \quad (12.18)$$

Подставляя значения радиуса $c = 1,44a$, отношения радиусов $b/a = 2$ и давления $q = 0,279\sigma_T$ в формулы (12.10), находим выражения напряжений в упругой зоне трубы (в пределах $1,44a \leq r \leq 2a$):

$$\sigma_r = -0,300\sigma_T (4a^2/r^2 - 1); \quad \sigma_\theta = 0,300\sigma_T (4a^2/r^2 + 1). \quad (12.19)$$

В точках внутренней поверхности трубы (при $r = a$) из формул (12.18) получаем:

$$\sigma_r = -0,700\sigma_T; \quad \sigma_\theta = 0,455\sigma_T;$$

в точках границы между упругой и пластической зонами (при $r = 1,44a$) — из формул (12.18) или (12.19):

$$\sigma_r = -0,279\sigma_T; \quad \sigma_\theta = 0,876\sigma_T;$$

в точках наружной поверхности трубы (при $r = 2a$) — из формул (12.19):

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = 0,600\sigma_T.$$

Из эпюр, изображенных на рис. 110, 111, 112, видно, что нормальные радиальные напряжения при переходе материала трубы из упругого состояния в пластическое не меняют характера распределе-

ния, а лишь возрастают пропорционально росту давления. Распределение нормальных тангенциальных напряжений в пластической стадии резко отличается от их распределения в упругой стадии работы материала. В упругой стадии в наиболее тяжелых условиях находится материал внутренних слоев трубы, а в пластической — наружных. Последнее подтверждается опытами над стальными трубами, разрушение которых начинается с поверхности.

§ 4. Понятие о несущей способности балок и плит на основе модели жесткопластического материала

При рассмотрении задач, в которых главное значение имеют пластические деформации, упругими деформациями можно вообще пренебречь, т. е. принять для расчета модель жесткопластического материала (см. рис. 104). Подобный материал не деформируется до тех пор, пока нагрузка не достигнет предельного значения. Так, в задаче о

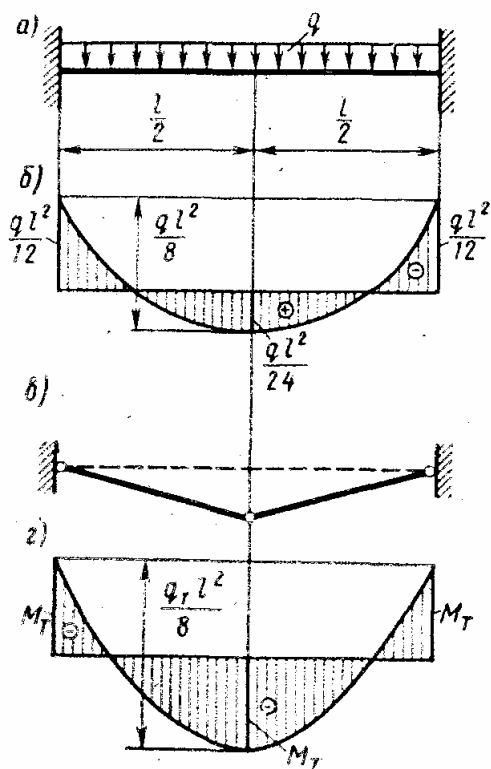


Рис. 113

чистом изгибе балка не деформируется, пока $M_0 < M_T$. А при достижении значения $M_0 = M_T$ прогибы балки начнут неограниченно возрастать и ее несущая способность будет полностью исчерпана. Предельный пластический момент M_T в этом случае определяется по формуле (12.2).

При поперечном изгибе предельное пластическое состояние достигается только в одном сечении (см. рис. 107, а, б), где образуется, как указывалось в § 1, пластический шарнир.

В случае статически неопределимой балки появление одного пластического шарнира еще не исчерпывает ее несущую способность. Проанализируем работу балки, изображенной на рис. 113, а. Эпюра изгибающих моментов в упругой стадии деформирования представлена на рис. 113, б. Очевидно, пластические шарниры первоначально появятся в защемлениях, где изгибающие момен-

ты имеют максимальное абсолютное значение. Однако это не приведет к нарушению работы балки и ее несущая способность окажется неисчерпанной. Согласно схеме жесткопластического материала, повышение нагрузки не меняет значения моментов в защемлении, а только увеличивает момент посередине пролета. При появлении же пластического шарнира посередине пролета балки становится статически изменяемой системой (рис. 113, в), т. е. ее несущая способность ока-

зывается полностью исчерпанной. Уравнение предельного пластического состояния балки, согласно рис. 113, а, имеет вид

$$2M_T = q_T l^2 / 8.$$

Отсюда предельное пластическое значение нагрузки

$$q_T = 16M_T / l^2 = 16\sigma_T W_{пл} / l^2.$$

Для сравнения приведем предельное значение нагрузки при расчете по упругой стадии. Согласно рис. 113, б,

$$M_{упр} = q_{упр} l^2 / 12,$$

откуда !

$$q_{упр} = \frac{12M_{упр}}{l^2} = \frac{12}{l^2} \sigma_T W_{упр}.$$

Для прямоугольного сечения размером $b \times h$, согласно формуле (12.2), предельная пластическая нагрузка

$$q_T = 16\sigma_T b h^2 / (4l^2) = 4\sigma_T b h^2 / l^2,$$

а предельная упругая нагрузка, согласно формуле (12.1), составляет

$$q_{упр} = \frac{12}{l^2} \sigma_T \frac{b h^2}{6} = 2\sigma_T b h^2 / l^2.$$

Сравнивая эти результаты, заключаем, что исчерпание несущей способности рассматриваемой балки в пластическом состоянии наступает при нагрузке в два раза большей той, при которой наступает предельное упругое состояние.

Советский ученый А. А. Гвоздев распространил расчет балок исходя из модели жесткопластического материала на изгиб пластинок. В качестве предельного пластического состояния для любого сечения пластинки он принял возникновение цилиндрического пластического шарнира, в котором образуется двугранный угол любой величины при постоянном предельном значении изгибающего момента. Упругие деформации пластинки в соответствии с моделью жесткопластического материала считаются малыми по сравнению с пластическими. А сами пластические деформации принимаются малыми по сравнению с толщиной пластинки, что позволяет применять линейную теорию изгиба пластинок.

В предельном состоянии эпюра нормальных напряжений по толщине пластинки принимается в виде двух прямоугольников. Поэтому, по аналогии с балкой прямоугольного поперечного сечения [см. формулу (12.2)], выражение предельного пластического момента, приходящегося на единицу ширины сечения, принимает вид

$$M_T = \sigma_T h^2 / 4,$$

где σ_T — предел текучести материала пластинки; h — толщина пластинки.

Развитие шарниров текучести происходит до тех пор, пока пластинка не потеряет свойства геометрической неизменяемости. В большинстве случаев истинная форма разрушения остается неизвестной и

разрушающая нагрузка определяется из упрощенных схем разрушения пластинки. При этом цилиндрические шарниры текучести обычно считаются прямолинейными. Из всех возможных форм разрушения выбирается та, которой соответствует наименьшая разрушающая нагрузка.

Рассмотрим многоугольную пластинку, шарнирно опертую по периметру и нагруженную сосредоточенной силой P в точке C (рис. 114, а). Форму разрушения такой пластинки можно представить в виде пирамиды с вершиной в точке C и с ребрами — цилиндрическими шарнирами текучести,

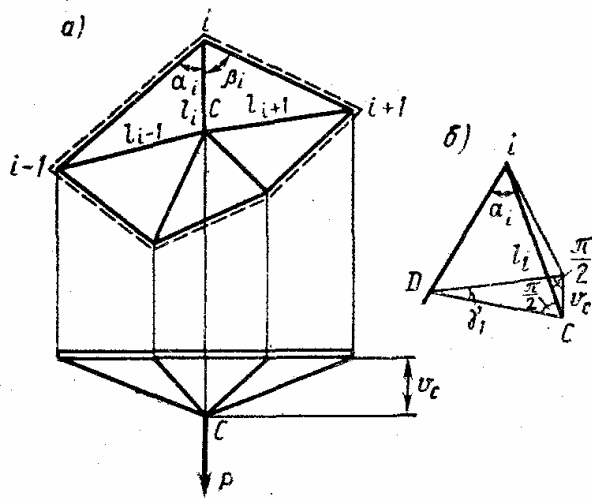


Рис. 114

идущими к вершинам опорного контура. Обозначая прогиб пластинки под силой P через v_c и приравнявая работу внешних сил работе предельных моментов M_T в шарнирах текучести, получаем

$$Pv_c = M_T \sum_{i=1}^k \theta_i l_i, \quad (a)$$

где θ_i — двугранный угол в шарнире текучести, на который повернутся две смежные плоскости пластинки; l_i — длина шарнира текучести; k — количество шарниров текучести, равное числу сторон многоугольника.

Обозначим через γ_1 угол поворота части iC ($i - 1$) пластинки относительно i -го шарнира текучести, а через γ_2 — то же для части iC ($i + 1$), так что

$$\theta_i = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (б)$$

Из рис. 114, б имеем

$$\sin \gamma_1 = \frac{v_c}{DC}. \quad (в)$$

В свою очередь,

$$DC = l_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (г)$$

Ввиду малости угла γ_1 синус в формуле (в) заменяем самим углом и после подстановки величины (г) находим

$$\gamma_1 = v_c / (l_i \operatorname{tg} \alpha_i). \quad (д)$$

Аналогично,

$$\gamma_2 = v_c / (l_i \operatorname{tg} \beta_i). \quad (е)$$

Собирая углы (д) и (е) в формулу (б), получаем

$$\theta_i = \frac{v_c}{l_i} (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i). \quad (ж)$$

Подставляя этот результат в формулу (а), находим значение разрушающей силы:

$$P = M_T \sum_{i=1}^k (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i). \quad (3)$$

Если пластинка имеет форму правильного многоугольника и сила P приложена в центре, то $\alpha_i = \beta_i$. С учетом известной из геометрии величины внутреннего угла в вершине многоугольника $\alpha_i + \beta_i = \pi - 2\pi/k$ находим

$$\operatorname{ctg} \alpha_i = \operatorname{ctg} \beta_i = \operatorname{tg} (\pi/k).$$

Подставляя это значение котангенсов в формулу (3), получаем

$$P = 2M_T k \operatorname{tg} (\pi/k).$$

В пределе для круглой пластинки, шарнирно опертой по контуру и нагруженной сосредоточенной силой в центре,

$$P = 2\pi M_T.$$

Поверхность круглой пластинки в предельном состоянии образует конус, сплошь заполненный цилиндрическими шарнирами текучести, которые направлены по радиусам.

В литературе можно найти значения разрушающих нагрузок и формы разрушения пластинок различного очертания и с различным закреплением контура или его части [см., например: К а л м а н о к А. С. Расчет пластинок. Справочное пособие. М., 1959].

Г Л А В А XIII ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. Явление ползучести и релаксации напряжений

Законы деформирования, рассматриваемые в теории упругости и теории пластичности, не учитывают фактор времени. В большинстве же случаев деформации реальных материалов не остаются неизменными при постоянной во времени нагрузке, а при постепенном нарастании нагрузки зависят от скорости нагружения. После разгрузки часто наблюдается возвращение остаточных деформаций к первоначальному нулевому значению.

Явление медленного роста деформации при постоянной нагрузке называется ползучестью или последствием. На рис. 115 показаны типы кривых ползучести. По оси абсцисс отложено время t , по оси ординат — относительное удлинение ϵ . При нагружении образец получает мгновенную деформацию ϵ_0 (отрезок OA), которая может быть упругой или упругопластической в зависимости от величины напряжения. На кривой ползучести $ABCK$ можно отметить три характерных периода деформирования.

Первый период (переходный) характеризуется уменьшением скорости ползучести. На рисунке он изображается отрезком *AB*. Длительность переходного периода относительно невелика. *Второй период* (отрезок *BC*) характеризуется постоянной скоростью ползучести. В зависимости от условий деформирования эта стадия имеет различную продолжительность. В некоторых случаях второй период может отсутствовать и деформирование от первого периода переходит сразу к третьему (участок *CK*). На этом участке скорость ползучести резко возрастает и период заканчивается образованием шейки и разрушением.

В некоторых случаях кривая ползучести может иметь только первый период (кривая *ABD*). В этом случае скорость ползучести затухает до нуля и деформация образца

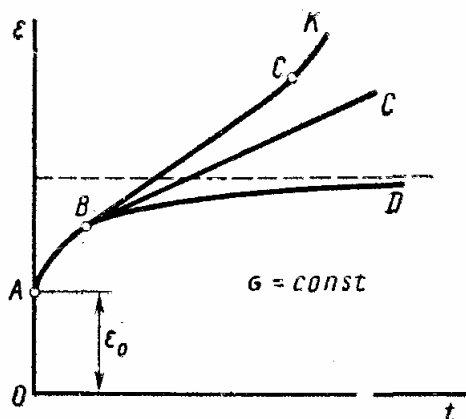


Рис. 115

стремится к некоторому конечному пределу. В других случаях на кривой отсутствует третий период (кривая *ABC*) и ползучесть заканчивается хрупким разрушением без образования шейки.

Характер кривых ползучести зависит от температуры материала и напряжений в нем. Так, в стали и чугуне при небольших температурах явление ползучести практически отсутствует. При температурах порядка 300° С деформации уже существенно зависят от времени. Чем выше тем-

пература, тем интенсивнее протекает процесс ползучести. При постоянной температуре и низких напряжениях деформирование происходит по кривой *ABD* (рис. 115), при увеличении напряжений процесс ползучести может происходить по кривой *ABC*, а при еще более высоких напряжениях ползучесть очень быстро переходит в стадию разрушения (кривая *ABCK*).

Однако для ряда материалов, например для металлов и сплавов с низкой температурой плавления (свинец, алюминий, дюралюмин), для высокополимерных материалов (резина, каучук, пластмассы), для строительных материалов (дерево, бетон, цементный камень), явление ползучести проявляется уже при комнатной температуре и низких напряжениях.

Деформации ползучести могут быть как упругими, так и пластическими, что хорошо выявляется при разгрузке материала. После снятия нагрузки образец получает остаточные деформации, которые с течением времени уменьшаются. Это явление называется *обратной ползучестью* или *восстановлением*. При *упругом последствии* (рис. 116) деформации, возникшие в процессе ползучести, после разгрузки с течением времени исчезают. При *пластическом последствии* (рис. 117) эти деформации после разгрузки уменьшаются, стремясь к некоторому конечному пределу.

Явление ползучести имеет и другую сторону: при неизменной деформации напряжения не остаются постоянными, а с течением времени

уменьшаются, стремясь к некоторому конечному пределу (рис. 118). Подобное явление носит название *релаксации напряжений*. Скорость релаксации в начале процесса велика, но с течением времени падает, в пределе стремясь к нулю.

Релаксация напряжений объясняется развитием в материале деформации ползучести. При постоянной общей деформации доля упругой деформации снижается и соответствующая ей доля напряжений

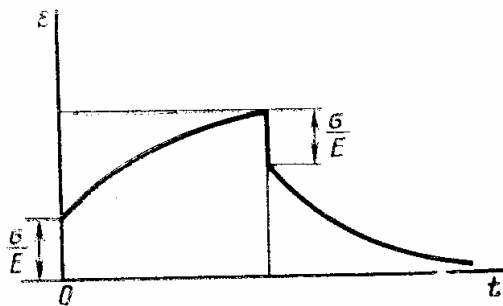


Рис. 116

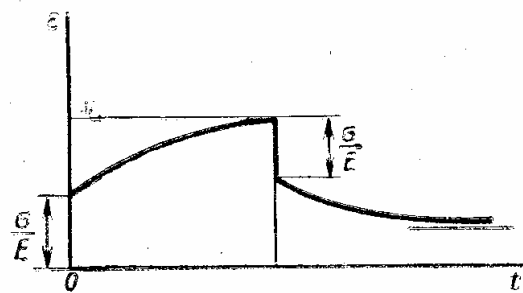


Рис. 117

уменьшается. В реальных конструкциях обычно обе стороны явления — ползучесть и релаксация напряжений — происходят одновременно.

Задача механической теории ползучести состоит в установлении определяющих уравнений, связывающих механические параметры состояния — напряжения и деформации. Эти соотношения должны содержать некоторые временные операторы — дифференциальные или интегральные. Процесс ползучести часто заканчивается разрушением тела, поэтому в идеале механическая теория ползучести должна содержать в себе элементы, позволяющие предсказывать момент разрушения.

В настоящее время еще нет исчерпывающего объяснения природы ползучести, в связи с чем и нет всеобъемлющей теории ползучести. Существует несколько теорий, которые в зависимости от гипотез, положенных в их основу, можно сгруппировать следующим образом: теории упрочнения; теории течения; теории старения; наследственные теории.

Все эти теории базируются на следующих общих допущениях:

- 1) материал является однородным и изотропным;
- 2) между деформациями ползучести и напряжениями существует линейная зависимость;
- 3) для деформаций ползучести справедлив принцип независимости действия сил;
- 4) деформация ползучести протекает одинаково при растяжении и сжатии.

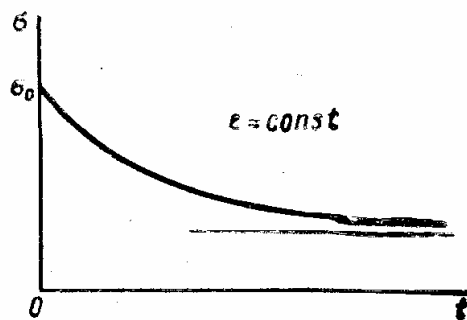


Рис. 118

§ 2. Модели упруговязких тел

В настоящее время считается общепринятым, что ползучесть представляет собой процесс вязкого течения, сопровождающегося структурными изменениями. Наиболее наглядно этот процесс можно описать с помощью механических моделей тел. Модель упругого тела, подчиняющегося закону Гука $\sigma = E\epsilon$, можно представить в виде упругой пружины (рис. 119).

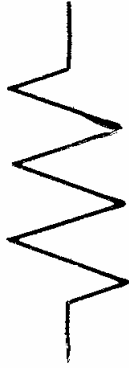


Рис. 119

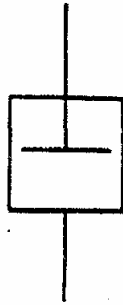


Рис. 120

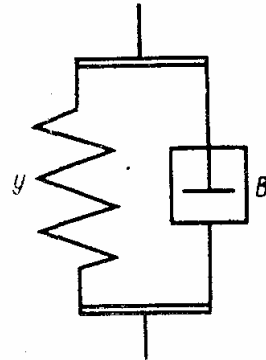


Рис. 121

Простейшая форма закона деформирования во времени описывает течение идеально вязкой жидкости, в которой напряжения пропорциональны скорости деформации:

$$\sigma = K\dot{\epsilon}.$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени. Коэффициент пропорциональности K называется *коэффициентом вязкости* или *коэффициентом внутреннего сопротивления*. Модель вязкого тела изображена на рис. 120.

Рассмотрим параллельное соединение упругого и вязкого элементов (рис. 121). Оно предполагает, что деформация в обоих элементах одинакова, а напряжения в сумме составляют полное напряжение:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_y + \sigma_v; \\ \sigma_y &= E\epsilon; \\ \sigma_v &= K\dot{\epsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Индекс «у» относится к упругому элементу, индекс «в» — к вязкому. Подставляя в первую формулу (а) две другие, получаем закон деформирования в форме

$$\sigma = E\epsilon + K\dot{\epsilon}. \quad (13.1)$$

Рассмотрим, какие свойства может описать этот закон. Полагая в дифференциальном уравнении (13.1) $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ и интегрируя, находим

$$\epsilon = \sigma_0/E + Ce^{-Et/K}. \quad (6)$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ возникла мгновенная деформация $\varepsilon = \varepsilon_0$, то

$$C = \varepsilon_0 - \sigma_0/E$$

и решение уравнения (б) принимает вид

$$\varepsilon = \sigma_0/E + (\varepsilon_0 - \sigma_0/E) e^{-Et/K}. \quad (\text{в})$$

График этой функции показан на рис. 122. Он описывает затухающую ползучесть материала при постоянном напряжении. С течением времени мгновенная деформация ε_0 увеличивается и асимптотически приближается к величине σ_0/E . Отношение E/K называется *коэффициентом затухания*.

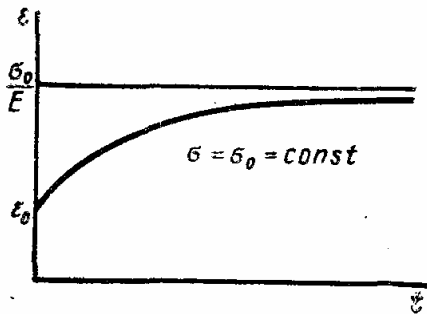


Рис. 122

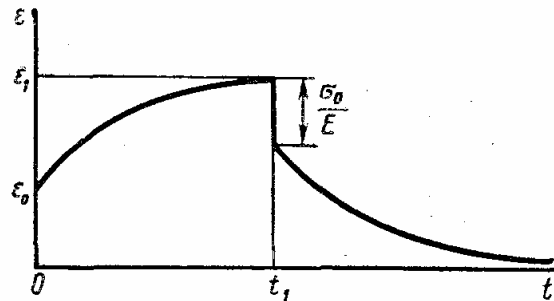


Рис. 123

При полной разгрузке в момент времени $t = t_1$, т. е. полагая в формуле (б) $\sigma_0 = 0$, получим следующий закон деформирования:

$$\varepsilon = Ce^{-Et/K}. \quad (\text{г})$$

Так как к указанному моменту деформация достигнет значения

$$\varepsilon_1 = \sigma_0/E + (\varepsilon_0 - \sigma_0/E) e^{-Et_1/K}$$

и при разгрузке появится мгновенная деформация $\varepsilon = \sigma_0/E$, то для определения постоянной C в формуле (г) граничное условие должно быть принято таким:

$$\text{при } t = t_1 \quad \varepsilon = \varepsilon_1 - \sigma_0/E.$$

Тогда

$$C = (\varepsilon_1 - \sigma_0/E) e^{Et_1/K}.$$

После подстановки этой константы в формулу (г) получаем закон деформирования при разгрузке:

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 - \sigma_0/E) e^{-E(t-t_1)/K}. \quad (\text{д})$$

Закон деформирования по формуле (в) с последующей разгрузкой по формуле (д) показан на рис. 123. Деформация после разгрузки с течением времени стремится к нулю.

При постоянной деформации $\varepsilon = \varepsilon_0$ скорость деформирования $\dot{\varepsilon} = 0$ и из уравнения (13.1) получаем $\sigma = E\varepsilon_0$, т. е. напряжение остается постоянным. Следовательно, уравнение (13.1) описывает упругое

последствие, но не описывает релаксацию напряжений, поэтому его называют законом деформирования простого нерелаксирующего тела, а соответствующую ему схему (см. рис. 121) — моделью тела Фойгта.

Рассмотрим теперь последовательное соединение упругого и вязкого элементов (рис. 124). Оно предполагает, что напряжения в упругом и вязком элементах одинаковы, а деформация системы равна сумме деформаций упругого и вязкого элементов:



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_y + \varepsilon_v; \\ \sigma &= E\varepsilon_y; \\ \sigma &= K\dot{\varepsilon}_v. \end{aligned} \right\}$$

Исключая отсюда деформации ε_y и ε_v , получаем закон деформирования в форме

$$\sigma + n\dot{\sigma} = K\varepsilon, \quad (13.2)$$

где постоянная $n = K/E$ называется *временем релаксации*.

При постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0$ закон деформирования (13.2) описывает ползучесть с постоянной скоростью

$$\dot{\varepsilon} = \sigma_0/K, \quad (e)$$

Рис. 124

т. е. установившуюся ползучесть.

Интегрируя уравнение (e), находим

$$\varepsilon = \sigma_0 t/K + C.$$

Используя начальное условие

$$\text{при } t = 0 \quad \varepsilon = \varepsilon_0,$$

получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sigma_0 t/K.$$

График этой функции показан на рис. 125.

При постоянной деформации $\varepsilon = \varepsilon_0$ ее скорость $\dot{\varepsilon} = 0$ и уравнение (13.2) принимает такой вид:

$$\dot{\sigma} + \sigma/n = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\sigma = Ce^{-t/n},$$

или с учетом начального условия, т. е. при $t = 0 \quad \sigma = \sigma_0$,

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/n}.$$

График этой функции показан на рис. 126. Начальное напряжение σ_0 с течением времени убывает и в пределе стремится к нулю. Следовательно, уравнение (13.2) описывает релаксацию напряжений. Поэтому его называют законом деформирования релаксирующего тела, а соответствующую ему схему (см. рис. 124) — моделью тела Максвелла.

Уравнения (13.1) и (13.2) не вполне точно описывают явления, протекающие в реальных материалах. Так, у большинства материалов при относительно небольших постоянных напряжениях деформации затухают во времени, в то же время почти всегда в материале на-

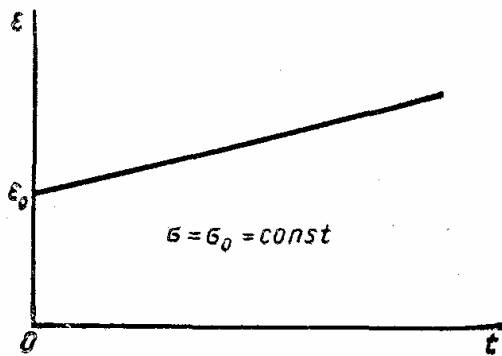


Рис. 125

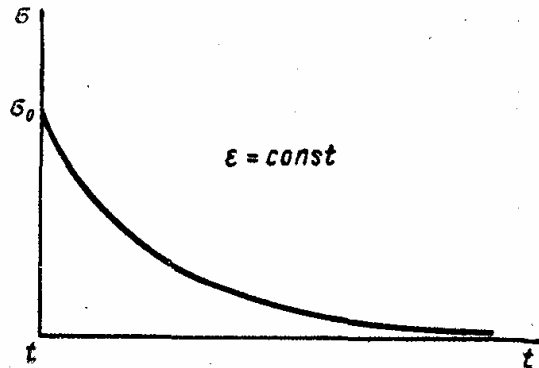


Рис. 126

блюдается явление релаксации напряжений, но напряжения затухают не полностью. Для более точного описания картины деформирования реальных материалов можно рассматривать более сложные модели, сочетающие упругие и вязкие элементы. Если взять два упругих и один вязкий элемент, соединенные, как показано на рис. 127, а, б, то приходим к такому закону:

$$\sigma + n\dot{\sigma} = H\epsilon + E\dot{\epsilon}. \quad (13.3)$$

Здесь E — мгновенный модуль упругости; H — длительный модуль упругости; n — время релаксации.

Смысл названий модулей упругости связан со скоростью деформирования. Так, при медленных процессах деформирования в уравнении (13.3) можно пренебречь скоростями $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$ ввиду малости по сравнению с величинами σ и ϵ . В этом случае получаем обычный закон Гука с длительным модулем упругости:

$$\sigma = H\epsilon.$$

При быстрых процессах деформирования, наоборот, напряжения и деформации малы по сравнению со скоростями их изменения. Пренебрегая величинами σ и ϵ , получаем закон Гука с мгновенным модулем упругости, продифференцированный по времени:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}.$$

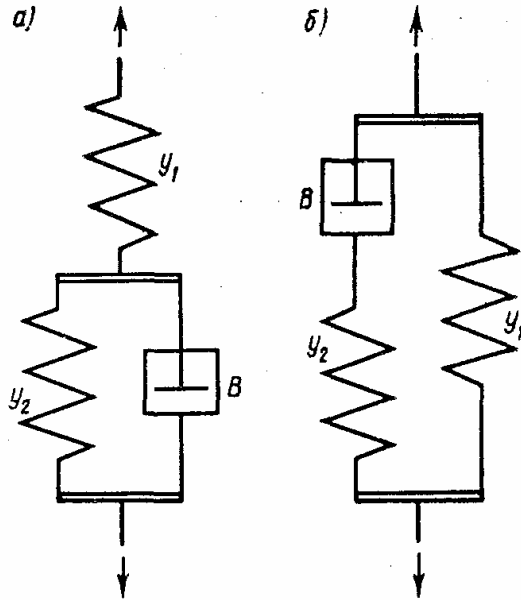


Рис. 127

При постоянном напряжении σ и начальной деформации $\epsilon_0 = \sigma/E$ решение уравнения (13.3) имеет вид

$$\epsilon = \sigma/H + \sigma (1/E - 1/H) e^{-Ht/(En)}.$$

График этой функции изображен на рис. 128. Он показывает, что в начальный момент времени появляется мгновенная деформация σ/E , а затем с течением времени деформация асимптотически приближается к величине σ/H .

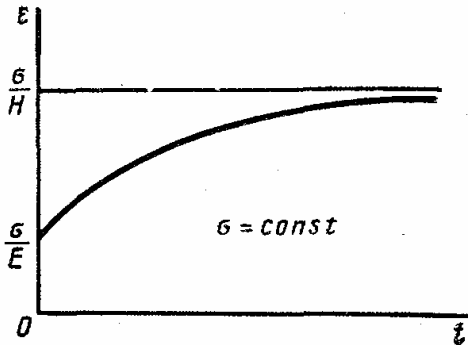


Рис. 128

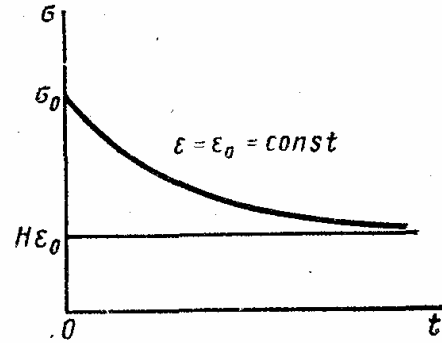


Рис. 129

При постоянной деформации $\epsilon = \epsilon_0$ и начальном напряжении σ_0 уравнение (13.3) имеет следующее решение:

$$\sigma = H\epsilon_0 + (\sigma_0 - H\epsilon_0) e^{-t/n}.$$

График этой функции показан на рис. 129. Он описывает релаксацию напряжений от начального значения σ_0 до значения, равного $H\epsilon_0$, к которому напряжения стремятся асимптотически.

Таким образом, закон (13.3) описывает ползучесть и релаксацию напряжений, ближе отражающие поведение реальных материалов, чем уравнения (13.1) и (13.2). Дальнейшее усложнение модели упруговязких тел приводит к усложнению расчетов, но вносит мало существенных поправок в уравнение деформирования, поэтому обычно останавливаются на законе (13.3) и называют его *основным упрощенным законом деформирования*.

§ 3. Установившаяся и неуставившаяся ползучесть. Длительная прочность материала

Установившейся ползучестью называется процесс деформирования, протекающий при постоянных во времени напряжениях, значение и распределение которых в сечении определяются при решении задачи. Ползучесть, протекающая при изменяющихся во времени напряжениях, называют *неустановившейся*.

Установившаяся ползучесть возникает в статически определимых системах при постоянных во времени нагрузках. В статически неопределимых системах даже при постоянных во времени нагрузках изменение деформаций всегда сопровождается изменением напряжений и перераспределением их по объему тела. Если при изучении ползучести в таких системах считать процесс установившимся, то распреде-

ление напряжений по объему тела будет отличным от распределения в начальный момент времени. Однако процесс их изменения во времени оказывается неизвестным. Подсчитанные при этом деформации получаются заниженными по отношению к действительным.

Как показывают исследования неустановившейся ползучести, напряжения в теле непрерывно изменяются, стремясь к напряжениям, получаемым в решении задачи об установившейся ползучести. В связи с этим и принимая во внимание, что расчеты при установившейся ползучести значительно проще, чем при неустановившейся, решение задач установившейся ползучести с известной погрешностью можно применять и при неустановившейся ползучести. В тех задачах, где необходимо исследовать изменение и перераспределение напряжений во времени, применять предположение об установившейся ползучести нельзя.

Рассмотрим основные уравнения установившейся ползучести. Уравнения теории напряжений и теории деформаций остаются теми же, что и в теории упругости и пластичности. Это дифференциальные уравнения равновесия (4.1), условия на поверхности (4.2), геометрические соотношения Коши (4.3) и уравнения неразрывности (4.4).

При построении физических уравнений предполагается, что можно пренебречь упругими деформациями и считать материал несжимаемым. Поэтому физические уравнения установившейся ползучести характеризуют связь между пластическими деформациями и напряжениями. Эта связь гласит: направляющие тензоры напряжений и деформаций ползучести совпадают:

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_{\varepsilon_{п}}$$

Аналогично выражению (11.6), эта зависимость может быть представлена в форме

$$D_\sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{iп}} D_{\varepsilon_{п}}$$

или через компоненты девиаторов:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{iп}} \varepsilon_{xп}; & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_{iп}} \gamma_{xyп}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{iп}} \varepsilon_{yп}; & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_{iп}} \gamma_{yzп}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{iп}} \varepsilon_{zп}; & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_{iп}} \gamma_{zxп}. \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Здесь интенсивность деформаций ползучести

$$\varepsilon_{iп} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times$$

$$\times \sqrt{(\varepsilon_{xп} - \varepsilon_{yп})^2 + (\varepsilon_{yп} - \varepsilon_{zп})^2 + (\varepsilon_{zп} - \varepsilon_{xп})^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xyп}^2 + \gamma_{yzп}^2 + \gamma_{zxп}^2)}. \quad (13.5)$$

а интенсивность напряжений определяется формулой (1.23).

Для связи между интенсивностью деформаций ползучести и интенсивностью напряжений обычно принимается простая аппроксимация. Так как кривые ползучести часто можно рассматривать как подобные, эту связь принимают в форме степенной зависимости

$$\varepsilon_{tp} = \Omega \sigma^n, \quad (13.6)$$

где Ω — функция времени и температуры, пропорциональная уравнению какой-либо из кривых ползучести.

В первом периоде ползучести хорошим приближением для функции Ω является степенная зависимость от времени:

$$\Omega(t) = At^\alpha \quad (0 < \alpha < 1). \quad (13.7)$$

Во втором периоде, когда процесс ползучести протекает с постоянной скоростью, хорошее приближение дает линейная функция

$$\Omega(t) = a + kt. \quad (13.8)$$

В такой постановке решение задач установившейся ползучести эквивалентно решению задачи теории пластичности при степенной зависимости (11.16) между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций.

Из сказанного следует, что уравнения установившейся ползучести не связаны с использованием теорий ползучести.

Процесс ползучести в большинстве случаев приводит к разрушению материала, поэтому при оценке прочности следует учитывать продолжительность действия нагрузки. Для оценки прочности материала при ползучести применяется характеристика $\sigma_{дл}$, называемая *пределом длительной прочности*. Под ней понимается отношение нагрузки, при которой происходит разрушение растянутого образца через определенный промежуток времени, к первоначальной площади его поперечного сечения.

§ 4. Понятие о наследственной теории ползучести и теории старения

Из перечисленных в § 1 данной главы теорий ползучести наибольшее распространение при расчете строительных конструкций получили теории старения и наследственные теории. Рассмотрим их подробнее.

Наследственная теория ползучести. Закон деформирования при одноосном напряженном состоянии получается по этой теории обобщением уравнения (13.3) на модель с бесконечным числом упругих и вязких элементов. Это уравнение можно представить в интегральной форме следующим образом:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) K(t-\tau) d\tau \right]. \quad (13.9)$$

Оно представляет собой интегральное уравнение Вольтерра относительно функции $\sigma(t)$. Функция $K(t-\tau)$ называется *ядром* уравнения (13.9). Функция $K(t-\tau)/E$ является функцией влияния нагружения

импульсом σdt в момент времени τ на деформацию в момент времени t . Ядро $K(t - \tau)$ легко получается путем обработки экспериментальных кривых.

Наследственная теория ползучести хорошо подтверждается опытами при расчете элементов конструкций из полимерных материалов. Применима она и для бетона, только в старом возрасте, поскольку не учитывает процесса старения (модуль упругости E принят постоянным), в то время как свойства бетона с течением времени заметно меняются. Ввиду того что свойства материала по этой теории не зависят от его возраста в момент нагружения, кривые ползучести в разном возрасте нагружения полностью повторяют друг друга (рис. 130).

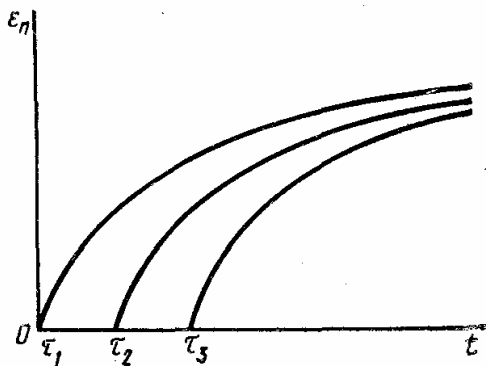


Рис. 130

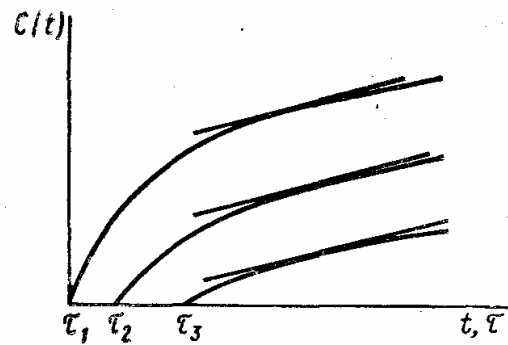


Рис. 131

Нижний предел интегрирования в уравнении (13.9) имеет значение $t = -\infty$, следовательно, деформация в любой момент времени определяется процессом изменения напряжений за время от $t = -\infty$ до рассматриваемого момента. Это свойство называется наследственностью. Отсюда и происходит название теории.

Теория старения. Эта теория предполагает, что при данной температуре деформация ползучести является определенной функцией напряжения и времени:

$$\varepsilon_n = f(\sigma, t).$$

Тогда полная деформация с учетом мгновенной упругой деформации равна

$$e = \sigma/E + f(\sigma, t).$$

При степенной зависимости (13.6) эта формула принимает вид

$$e = \sigma/E + \Omega\sigma^n.$$

Решение задач по теории старения связано с меньшими математическими трудностями, чем по другим теориям. Поэтому ее довольно часто применяют в инженерных расчетах, в частности для бетона. Бетон с течением времени меняет свои свойства, т. е. кривые ползучести зависят от его возраста с момента изготовления. Теория старения бетона исходит из предположения, что кривые ползучести, соответствующие нагружению в разном возрасте, параллельны между собой. Это зна-

чит, что для бетона, нагруженного в заданном возрасте t , кривая ползучести может быть получена из кривой для того же бетона и при тех же напряжениях, но нагруженного в более раннем возрасте, если отбросить ту ее часть, которая соответствует разности возрастов. В соответствующих точках этих кривых касательные должны быть параллельны друг другу (рис. 131).

Закон деформирования в теории старения бетона записывается в таком виде:

$$\epsilon = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} - C(\tau) \right] d\tau, \quad (13.10)$$

где $C(\tau)$ — мера ползучести, которая обычно принимается в форме

$$C(\tau) = K(1 - e^{-\gamma\tau}).$$

Коэффициенты K и γ определяются в результате обработки экспериментальной кривой.

Теория старения учитывает изменение возраста бетона, но не учитывает длительности приложения нагрузки. Преимущество этой теории перед другими заключается в том, что вместо семейства кривых ползучести, отвечающих нагружению бетона в разном возрасте, достаточно иметь одну кривую, соответствующую нагружению в начальном возрасте. Однако во многих случаях теория старения дает большую погрешность, особенно при нагружении в раннем возрасте, когда на практике не наблюдается параллельности кривых ползучести.

Недостатки рассмотренных выше теорий ползучести заставляют исследователей уточнять или искать новые пути решения задачи. Применительно к бетону предложена модифицированная теория старения, в наследственной теории вводится переменный модуль упругости и т. д. В настоящее время успешно применяется теория упруго-ползучего тела, разработанная отечественными учеными Г. Н. Масловым и Н. Х. Арутюняном. Эта теория является синтезом наследственной теории и теории старения и наиболее полно характеризует процесс ползучести бетона.

ГЛАВА XIV ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. Установившаяся ползучесть балки при чистом изгибе

Рассмотрим задачу о чистом изгибе прямого призматического бруса (см. рис. 12) при установившейся ползучести и следующих ограничениях.

1. Сечение бруса имеет две оси симметрии.
2. Кривые ползучести рассматриваемого материала при растяжении и сжатии в случае одинаковых напряжений и температур идентичны.

Примем степенную зависимость (13.6) между интенсивностью деформаций ползучести и интенсивностью напряжений:

$$\varepsilon_{i\Pi} = \sigma_i^n \Omega. \quad (a)$$

Так как в балке при чистом изгибе возникает линейное напряженное состояние (5.1), то согласно выражению (1.23) интенсивность напряжений $\sigma_i = |\sigma_z|$. Если считать, что материал несжимаем (см. § 4, гл. XI), то согласно выражению (2.17) интенсивность деформаций ползучести $\varepsilon_{i\Pi} = |\varepsilon_{z\Pi}|$. Тогда из формулы (a) получаем следующую зависимость деформаций ползучести от напряжений:

$$\varepsilon_{z\Pi} = \text{sign } \sigma_z |\sigma_z|^n \Omega; \quad (б)$$

здесь символом $\text{sign } \sigma_z$ обозначен знак напряжения σ_z , так как при положительных напряжениях появляются деформации растяжения, а при отрицательных — сжатия.

Согласно соотношениям (5.2), имеем

$$\varepsilon_{z\Pi} = \text{sign } x |x|/\rho_{\Pi}. \quad (в)$$

Сравнивая формулы (б) и (в), получаем закон распределения нормальных напряжений по высоте поперечных сечений:

$$\sigma_z = \text{sign } x \left(\frac{|x|}{\Omega \rho_{\Pi}} \right)^{1/n}. \quad (г)$$

Здесь учтено, что

$$\text{sign } \sigma_z = \text{sign } \varepsilon_{z\Pi} = \text{sign } x.$$

Изгибающий момент связан с напряжениями следующей зависимостью:

$$M_y = \int_F \sigma_z x dF.$$

Подставляем сюда напряжения (г):

$$M_y = \left(\frac{1}{\Omega \rho_{\Pi}} \right)^{1/n} \int_F |x|^{(n+1)/n} dF. \quad (д)$$

Интеграл

$$J_{ny} = \int_F |x|^{(n+1)/n} dF$$

называют *обобщенным моментом инерции* площади поперечного сечения относительно оси y .

Зависимость (д) позволяет выразить кривизну изогнутой оси балки, возникшую вследствие ползучести материала, через изгибающий момент:

$$\frac{1}{\rho_{\Pi}} = \left(\frac{M_y}{J_{ny}} \right)^n \Omega. \quad (e)$$

Внося этот результат в формулу (г), получаем

$$\sigma_z = \text{sign } x \frac{M_y |x|^{1/n}}{J_{ny}} \quad (14.1)$$

Оценим полученный результат на примере бруса прямоугольного сечения размером $b \times h$ (см. рис. 13). В этом случае

$$J_{ny} = 2b \int_0^{+h/2} x^{(n+1)/n} dx,$$

или после интегрирования

$$J_{ny} = \frac{bh^{(2n+1)/n}}{2(n+1)/n} \frac{n}{2n+1}.$$

Для построения графика введем безразмерные величины: напряженье $\sigma^* = \frac{\sigma_z}{M_y/W_y}$ и координату $x^* = \frac{x}{h/2}$. Тогда формула (14.1) примет вид

$$\sigma^* = \text{sign } x^* |x^*|^{1/n} (2n+1)/(3n). \quad (14.2)$$

График зависимости σ^* от x^* (эюра безразмерных напряжений σ^* по половине безразмерной высоты сечения) показан на рис. 132. Из графика можно сделать следующие выводы.

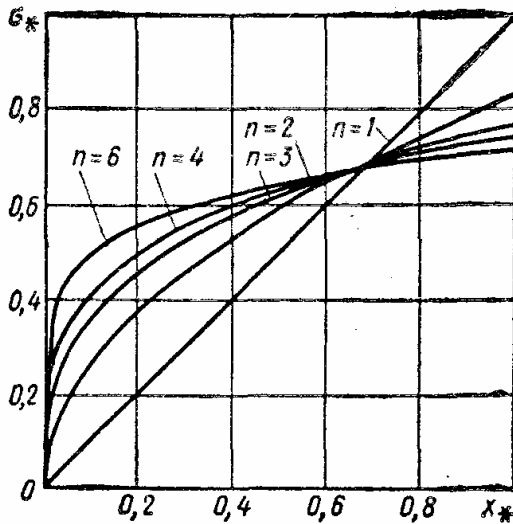


Рис. 132

1. При установившейся ползучести максимальные нормальные напряжения при чистом изгибе меньше таковых в начальный момент времени.

2. Уменьшение напряжений тем больше, чем выше показатель степени n . При этом с увеличением n происходит выравнивание напряжений по высоте сечения.

Перейдем теперь к определению прогибов u_{II} балки в процессе ползучести. Используя приближенное выражение кривизны (е), получаем

$$\frac{d^2 u_{II}}{dz^2} = -\frac{1}{\rho_{II}} = -\left(\frac{M_y}{J_{ny}}\right)^n \Omega.$$

Здесь знак минус появился в связи с тем, что ось x направлена вниз (см. рис. 12). Интегрируя, находим

$$u_{II} = -\Omega \int_0^z dz \int_0^z \left(\frac{M_y}{J_{ny}}\right)^n dz + Cz + D.$$

Постоянные интегрирования C и D зависят от закрепления балки. Исследуем функцию прогибов для балки на двух опорах при чистом

изгибе. Так как в этом случае момент $M_y = \text{const}$, то

$$u_{\text{п}} = -\Omega \left(\frac{M_y}{J_{ny}} \right)^n \frac{z^2}{2} + Cz + D. \quad (\text{ж})$$

Для определения постоянных имеем два граничных условия: при $z = 0$ и $z = l$ $u_{\text{п}} = 0$. Отсюда

$$C = \Omega \left(\frac{M_y}{J_{ny}} \right)^n \frac{l}{2}; \quad D = 0.$$

Подставляя эти константы в формулу (ж), получаем

$$u_{\text{п}} = \Omega \left(\frac{M_y}{J_{ny}} \right)^n \frac{lz - z^2}{2}.$$

Максимальный прогиб возникает при $z = l/2$

$$\max u_{\text{п}} = \Omega \left(\frac{M_y}{J_{ny}} \right)^n \frac{l^2}{8}.$$

Если в качестве функции Ω принять степенную зависимость (13.7), то выражение максимального прогиба от ползучести материала балки примет такой вид:

$$\max u_{\text{п}} = At^\alpha \left(\frac{M_y}{J_{ny}} \right)^n \frac{l^2}{8}.$$

Добавляя сюда максимальный упругий прогиб, получим полный максимальный прогиб $\max u = \frac{M_y l^2}{8EJ_y} + At^\alpha \left(\frac{M_y}{J_{ny}} \right)^n \frac{l^2}{8}$.

Таким образом, прогиб меняется подобно кривой ползучести материала балки.

§ 2. Установившаяся ползучесть круглого бруса при кручении

При кручении в поперечных сечениях круглого бруса (см. рис. 14) возникают только касательные напряжения, закон распределения которых одинаков во всех сечениях. Из шести составляющих деформаций ползучести согласно соотношениям (5.5) отличны от нуля только две: $\gamma_{yz\text{п}} = \varphi'x$, $\gamma_{zx\text{п}} = -\varphi'y$. Подставляя их в формулу (2.17), определяем интенсивность деформаций ползучести:

$$\varepsilon_{i\text{п}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \varphi' \rho, \quad (\text{а})$$

здесь через ρ обозначено расстояние точки до центра сечения (см. рис. 15).

Из составляющих напряжений (5.6) отличны от нуля также только две: τ_{yz} и τ_{zx} . Поэтому интенсивность напряжений (1.23) составляет $\sigma_i = \sqrt{3} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$, или согласно выражению (5.7) и рис. 16

$$\sigma_i = \tau \sqrt{3}. \quad (\text{б})$$

Принимая для установившейся ползучести степенную зависимость (13.6) между интенсивностью деформаций и интенсивностью напряже-

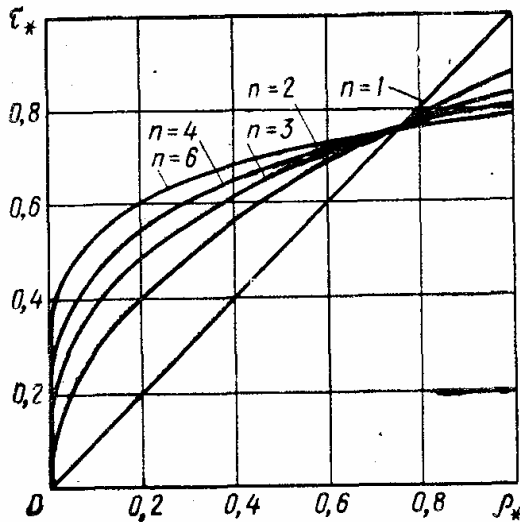


Рис. 133

ний, после подстановки соотношений (а) и (б) находим

$$\tau = \frac{1}{3^{(n+1)/(2n)}} \left(\frac{\varphi' \rho}{\Omega} \right)^{1/n} \quad (\text{в})$$

Крутящий момент связан с касательными напряжениями зависимостью

$$M_{\kappa} = \int_F \tau \rho \, dF.$$

Подставляя сюда значение τ из формулы (в), получаем

$$M_{\kappa} = \left(\frac{\varphi'}{\Omega} \right)^{1/n} J_{np}, \quad (\text{г})$$

где обобщенный полярный момент инерции

$$J_{np} = \frac{1}{3^{(n+1)/(2n)}} \int_F \rho^{(n+1)/n} \, dF. \quad (\text{д})$$

Производя интегрирование, получаем

$$J_{np} = \frac{2\pi}{3^{(n+1)/(2n)}} \int_0^r \rho^{(2n+1)/n} \, d\rho = \frac{2\pi r^{(3n+1)/n}}{3^{(n+1)/(2n)}} \frac{n}{3n+1}.$$

Из формулы (г) находим $\varphi' = \left(\frac{M_{\kappa}}{J_{np}} \right)^n \Omega$

и подставляем в выражение (в):

$$\tau = \frac{1}{3^{(n+1)/(2n)}} \frac{M_{\kappa} \rho^{1/n}}{J_{np}}. \quad (14.3)$$

Для построения эпюры полученных напряжений введем безразмерную величину $\tau^* = \frac{\tau}{M_{\kappa}/W_p}$, которая с учетом формулы (14.3) примет вид

$$\tau^* = \rho_*^{1/n} (3n+1)/(4n), \quad (14.4)$$

где $\rho_* = \rho/r$ — безразмерная координата.

Эпюра напряжений τ^* показана на рис. 133. Из нее вытекают точно такие же два вывода, которые были сделаны в предыдущем параграфе относительно нормальных напряжений σ^* при чистом изгибе.

§ 3. Установившаяся ползучесть толстостенной трубы под действием внутреннего давления

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии трубы (см. рис. 43, а), считая, что она находится в условиях плоской деформации, т. е. деформация ползучести вдоль оси трубы

$$\epsilon_{zII} = 0. \quad (\text{а})$$

Две другие составляющие деформации ползучести, согласно формулам (7.30), выражаются через перемещения, связанные с ползучестью, следующим образом:

$$\varepsilon_{\theta\Pi} = \frac{w_{\Pi}}{r}; \quad \varepsilon_{r\Pi} = \frac{dw_{\Pi}}{dr}. \quad (6)$$

Условие несжимаемости материала при ползучести трубы имеет такой вид:

$$\theta_{\Pi} = \varepsilon_{r\Pi} + \varepsilon_{\theta\Pi} + \varepsilon_{z\Pi} = 0.$$

Подставляя сюда деформации (а) и (б), получаем дифференциальное уравнение для определения радиального перемещения при ползучести

$$\frac{du_{\Pi}}{dr} = -\frac{u_{\Pi}}{r}.$$

Интегрируя, находим $u_{\Pi} = C/r$.

После подстановки этого результата в формулы (б) находим составляющие деформации ползучести:

$$\varepsilon_{\theta\Pi} = C/r^2; \quad \varepsilon_{r\Pi} = -C/r^2. \quad (в)$$

Интенсивность деформаций (2.17) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\varepsilon_{i\Pi} = \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_{r\Pi}^2 + \varepsilon_{\theta\Pi}^2 - \varepsilon_{r\Pi} \varepsilon_{\theta\Pi}}.$$

После подстановки деформаций (в)

$$\varepsilon_{i\Pi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{r^2}. \quad (г)$$

Из физических уравнений установившейся ползучести (13.4) в полярной системе координат имеем:

$$\sigma_r - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{i\Pi}} \varepsilon_{r\Pi}; \quad \sigma_{\theta} - \sigma_0 = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{i\Pi}} \varepsilon_{\theta\Pi}.$$

Отсюда разность напряжений

$$\sigma_r - \rho_{\theta} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_{i\Pi}} (\varepsilon_{r\Pi} - \varepsilon_{\theta\Pi}). \quad (д)$$

Примем для установившейся ползучести степенную зависимость (13.6) между интенсивностью деформаций ползучести и интенсивностью напряжений. Тогда

$$\sigma_i = \left(\frac{\varepsilon_{i\Pi}}{\Omega} \right)^{1/n}. \quad (е)$$

После подстановки выражений (в), (г) и (е) в уравнение (д) находим

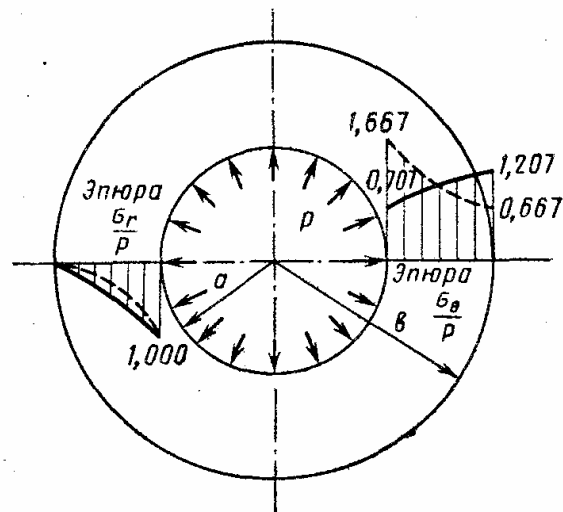


Рис. 134

$$\sigma_r - \sigma_\theta = - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(n+1)/n} \left(\frac{C}{\Omega r^2} \right)^{1/n}. \quad (\text{ж})$$

Внося эту разность напряжений в дифференциальное уравнение равновесия (7.29) для осесимметричной задачи, получаем

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(n+1)/n} \left(\frac{C}{\Omega} \right)^{1/n} \frac{1}{r^{(n+2)/n}},$$

откуда после интегрирования по r находим радиальное нормальное напряжение:

$$\sigma_r = C_1 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(n+1)/n} \left(\frac{C}{\Omega} \right)^{1/n} \frac{n}{2r^{2/n}}, \quad (\text{з})$$

из формулы (ж) — тангенциальное нормальное напряжение:

$$\sigma_\theta = C_1 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(n+1)/n} \left(\frac{C}{\Omega} \right)^{1/n} \frac{n-2}{2r^{2/n}}. \quad (\text{и})$$

Граничные условия имеют вид:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p;$$

$$\text{при } r = b \quad \sigma_r = 0.$$

Отсюда находим постоянные:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(n+1)/n} \left(\frac{C}{\Omega} \right)^{1/n} = \frac{2}{n} \frac{\rho a^{2/n} b^{2/n}}{b^{2/n} - a^{2/n}};$$

$$C_1 = \frac{\rho a^{2/n}}{b^{2/n} - a^{2/n}}.$$

После подстановки значений постоянных формулы (з) и (и) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\rho a^{2/n}}{b^{2/n} - a^{2/n}} \left(1 - \frac{b^{2/n}}{r^{2/n}} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\rho a^{2/n}}{b^{2/n} - a^{2/n}} \left(1 - \frac{n-2}{n} \frac{b^{2/n}}{r^{2/n}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.5)$$

Эпюры этих напряжений для трубы радиусом $b = 2a$ при $n = 4$ показаны на рис. 134. Сплошными линиями показаны напряжения при установившейся ползучести, а штриховыми — в пределах упругости согласно рис. 43, а.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
§ 1. Теория упругости, пластичности и ползучести. Ее задачи и методы (4).	
§ 2. Краткий исторический очерк развития теории упругости, пластичности и ползучести (5).	

Раздел первый

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Глава I. Теория напряжений	9
§ 1. Объект изучения. Основные принципы классической теории упругости (9).	
§ 2. Силы и напряжения (11). § 3. Дифференциальные уравнения равновесия (13). § 4. Напряжения на наклонных площадках. Условия на поверхности (16).	
§ 5. Исследование напряженного состояния в точке тела. Главные напряжения. Инварианты напряженного состояния (17). § 6. Тензор напряжений. Интенсивность напряжений. Наибольшие касательные напряжения (21).	
Глава II. Теория деформаций	24
§ 1. Составляющие перемещения и деформации. Зависимость между ними (24).	
§ 2. Объемная деформация (27). § 3. Уравнения неразрывности деформаций (28). § 4. Тензор деформаций. Главные деформации. Интенсивность деформаций (30).	
Глава III. Обобщенный закон Гука	32
§ 1. Выражение деформаций через напряжения (32). § 2. Выражение напряжений через деформации (35). § 3. Закон Гука в тензорной форме (37). § 4. Работа упругих тел. Потенциальная энергия деформаций (38).	
Глава IV. О решении задачи теории упругости	40
§ 1. Основные уравнения теории упругости и способы их решения (40). § 2. Решение задачи теории упругости в перемещениях (42). § 3. Решение задачи теории упругости в напряжениях при постоянстве объемных сил (44). § 4. Типы граничных условий на поверхности тела (46). § 5. Теорема единственности. Методы решения задачи теории упругости (47).	
Глава V. Простейшие задачи теории упругости	49
§ 1. Чистый изгиб прямого призматического бруса (49). § 2. Кручение круглого бруса постоянного сечения (54).	

Раздел второй

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Глава VI. Плоская задача теории упругости в прямоугольных координатах	57
§ 1. Плоская деформация (57). § 2. Обобщенное плоское напряженное состояние (59). § 3. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений (60). § 4. Методы решения плоской задачи для прямоугольных односвязных областей (62). § 5. Изгиб консоли силой, приложенной на конце (70). § 6. Балка на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки (73). § 7. Треугольная подпорная стенка (77). § 8. Расчет балки-стенки (80). § 9. Обоснование принципа Сен-Венана (85).	
Глава VII. Плоская задача теории упругости в полярных координатах	86
§ 1. Основные уравнения (86). § 2. Простое радиальное напряженное состояние (91). § 3. Клинь, нагруженный в вершине сосредоточенной силой (92). § 4. Сжатие клина (94). § 5. Изгиб клина (96). § 6. Действие сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости (98). § 7. Функция напряжений для плоской задачи в полярных координатах (102). § 8. Осесимметричные задачи. Решение в перемещениях (103). § 9. Расчет трубы с толстыми стенками (задача Ламе) (105). § 10. Решение осесимметричной задачи с помощью функции напряжений (108). § 11. Чистый изгиб криволинейного бруса. Задача Головина (109). § 12. Понятие о расчете цилиндрических катков (111). § 13. Понятие о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство (113).	

Раздел третий

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Глава VIII. Изгиб тонких пластинок 116

§ 1. Основные понятия и гипотезы (116). § 2. Перемещения и деформации в пластинке (117). § 3. Напряжения в пластинке (119). § 4. Усилия в пластинке (121). § 5. Выражения напряжений через усилия (123). § 6. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки (124). § 7. Условия на контуре пластинки (126). § 8. Прямоугольная пластинка. Решение Навье (129). § 9. Прямоугольная пластинка. Решение Леви (134). § 10. Понятие о расчете прямоугольной пластинки и бесконечной полосы на упругом основании (138). § 11. Основные уравнения изгиба круглой пластинки (140). § 12. Простейшие осесимметричные задачи изгиба круглой пластинки (141). § 13. Понятие о расчете гибких пластинок (146)

Глава IX. Вариационные методы решения задач по теории изгиба пластинок 150

§ 1. Сущность вариационных методов решения дифференциальных уравнений (150). § 2. Метод Ритца — Тимошенко (151). § 3. Метод Бубнова — Галеркина (156). § 4. Метод Власова (158). § 5. Потенциальная энергия при изгибе пластинки (162). § 6. Пример решения задачи методом Ритца — Тимошенко (164). § 7. Пример решения задачи методом Бубнова — Галеркина (168)

Глава X. Основы расчета тонких оболочек 171

§ 1. Понятие о расчете оболочек по моментной и безмоментной теориям (171). § 2. Расчет оболочки произвольной формы по безмоментной теории (174). § 3. Дифференциальные уравнения равновесия круговой цилиндрической оболочки (179). § 4. Перемещения и деформации в круговой цилиндрической оболочке (184). § 5. Физические уравнения круговой цилиндрической оболочки (187). § 6. Осесимметричное нагружение замкнутой круговой цилиндрической оболочки (189). § 7. Расчет стенки цилиндрического резервуара (191). § 8. Качественная характеристика напряженного состояния открытых и замкнутых цилиндрических оболочек (194). § 9. «Полубезмоментная» теория цилиндрических оболочек Власова (196). § 10. Расчет оболочек вращения на симметричную нагрузку по моментной теории (201). § 11. Понятие о краевом эффекте. Краевой эффект в сферической и цилиндрической оболочках (204). § 12. Элементы теории пологих оболочек Власова (210). § 13. Понятие о расчете гибких пологих оболочек (215)

Раздел четвертый

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Глава XI. Основные зависимости теории пластичности 217

§ 1. Две задачи теории пластичности. Активная, пассивная и нейтральная деформации. Простое и сложное нагружения (217). § 2. Математический аппарат теории пластичности (219). § 3. Условия пластичности (220). § 4. Теория малых упругопластических деформаций (222). § 5. Теорема о разгрузке (224). § 6. Варианты зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (225). § 7. Понятие о теории пластического течения (227). § 8. Постановка задачи теории пластичности (228)

Глава XII. Простейшие задачи теории пластичности 231

§ 1. Упругопластический изгиб призматического бруса (231). § 2. Упругопластическое кручение бруса круглого сечения (235). § 3. Упругопластическое состояние толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления (237). § 4. Понятие о несущей способности балок и плит на основе модели жесткопластического материала (242).

Глава XIII. Основные зависимости теории ползучести 245

§ 1. Явление ползучести и релаксации напряжений (245). § 2. Модели упруговязких тел (248). § 3. Установившаяся и неустойчивая ползучесть. Длительная прочность материала (252). § 4. Понятие о наследственной теории ползучести и теории старения (254)

Глава XIV. Простейшие задачи теории ползучести 250

§ 1. Установившаяся ползучесть балки при чистом изгибе (250). § 2. Установившаяся ползучесть круглого бруса при кручении (259). § 3. Установившаяся ползучесть толстостенной трубы под действием внутреннего давления (260)